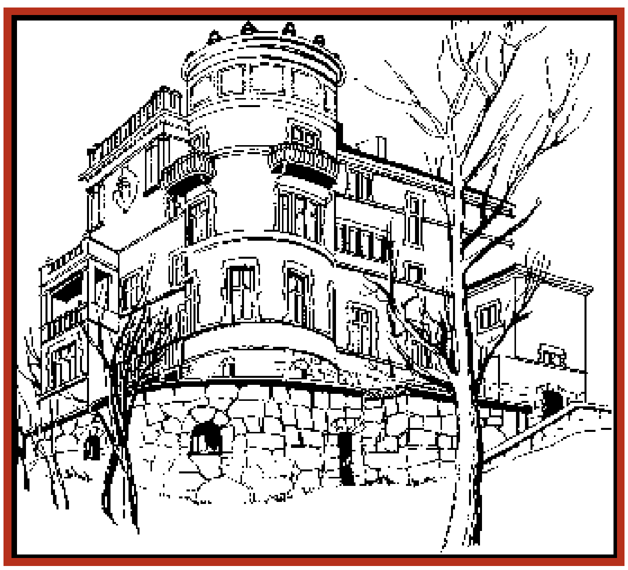
MATEMÁTICAS Y SEGUROS

José Luis Fernández Pérez[1]

Mi propósito en esta conferencia es transmitir mi visión, con óptica de matemático con cierta experiencia en el mundo financiero, y no de estadístico o actuario, del papel de las Matemáticas y de los matemáticos [2] en el ámbito de los seguros.

Lo matemático y lo actuarial



Instituto Mittag-Leffler

Permítaseme una referencia personal para comenzar esta charla. No tiene valor como anécdota personal, ¡faltaría más!, pero quizás tenga algo de categoría reveladora.

El instituto Mittag-Leffler, uno de los más famosos centros de investigación y de reuniones matemáticas, nació de la donación del matemático que le da nombre.

Mittag-Leffler donó una magnífica villa en Djursholm, en el extrarradio de Estocolmo, para que sirviera de sede. Mittag-Leffler donó además su magnífica biblioteca y la extensa y riquísima correspondencia que mantuvo con los principales matemáticos de la época; correspondencia personal y también correspondencia editorial. Mittag-Leffler fundó la ya centenaria Acta Mathematica, que desde entonces es una de las más prestigiosas revistas de investigación matemática. La propia revista es parte del legado a su instituto; allí se administra y se edita.

Djursholm es un barrio de clase alta, con villas magníficas. Una sencilla placa señala que una de estas majestuosas villas es la sede del Instituto Mittag-Leffler, pero no hay indicación alguna de que se trata de un centro de investigación en Matemáticas. Los investigadores residentes gustan de pasear por sus jardines para pensar en lo que les ocupa. El paseo de un

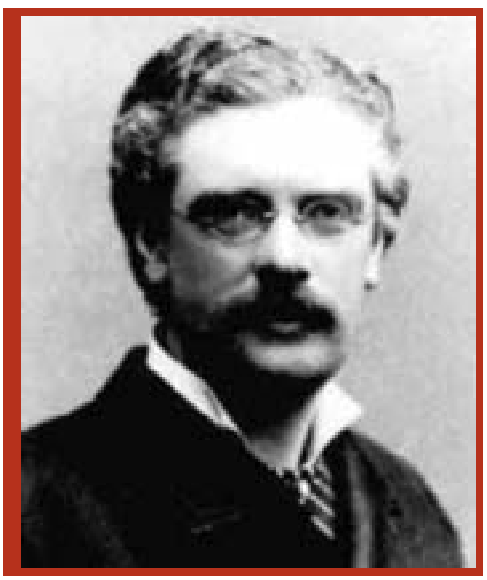
[1] Departamento de Matemáticas. Universidad Autnónoma de Madrid. `joseluis.fernandez@uam.es`
Analistas Financieros Internacionales. `jlfernandez@afi.es`

[2] Sin distinción sobre purezas fundamentales o aplicabilidades varias.

par de investigadores que están colaborando en alguna investigación suele consistir de unos pocos pasos lentos mirando al suelo, una parada, y un cierto dibujo en el aire, al que se corresponde con otra mirada al suelo y algunos pasos más, y así sucesivamente. Las gentes del lugar dudaron durante mucho tiempo si se trataba de un instituto de rehabilitación para alcohólicos o de un sanatorio de enfermos mentales.

La correspondencia de Mittag-Leffler se halla archivada en una buhardilla del Instituto. Recuerdo con suma emoción haber tenido en mis manos una carta de Weierstrass a Mittag-Leffler, un momento al que mi mínimo conocimiento de la lengua alemana no le restó deleite. Pero allí había escritura *a mano* del propio Poincaré, de la Kowaleskaya, de Cantor, Weierstrass, Hadamard, y otros.

La biblioteca del Instituto Mittag-Leffler es un lugar fascinante. Para ser una biblioteca privada es enorme. Desde la época en que allí vivía Mittag-Leffler se han añadido muchos libros, por supuesto, pero el espacio ya estaba en la casa original. Ahora sólo contiene libros de matemáticas y pocos de algunas otras ciencias, aunque es de suponer que en su día albergase también una biblioteca general de literatura, historia y demás artes y ciencias.



Gösta Mittag-Leffler

Una estatua de bronce de un Mittag-Leffler de edad avanzada sentado en un sillón domina y vigila con mirada atenta la estancia de la biblioteca. Uno se siente observado por él cuando lee un libro de matemáticas apoyado en un anaquel de esa biblioteca. Cuando pienso en la biblioteca de Mittag-Leffler, o del Instituto Mittag Leffler, me acuerdo al tiempo de un comentario del matemático holandés Van der Waerden sobre su época de estudiante en Gotinga. Rememoraba éste en cierta ocasión de cuánto había aprendido en la biblioteca de Matemáticas de Gotinga, casi nunca del libro que había ido a buscar sino de aquel otro que en la búsqueda se cruzaba ante su vista. Una rica biblioteca tiene esa virtud, entre muchas otras.

En el tiempo que pasé en el Instituto dedicaba, alguien diría que perdía, y yo en estos tiempos que corren me atrevo a afirmar que invertía, horas en hojear y ojear los libros de esa biblioteca. Claro, repasar, incluso oler, Acta Eruditorum original, en encuadernaciones doradas y rojas y palpar los textos de Euler era puro fetichismo. Una de las características que quizás más me sorprendió de la biblioteca fue la abundancia de libros de matemática actuarial y de probabilidad aplicada al cálculo actuarial que había. Aquellos no eran libros de adquisición reciente. ¿Cómo podían interesarle aquellos arcanos me preguntaba yo? Mittag-Leffler era [3] de Variable Compleja. Su biblioteca confirma su interés por la aplicación de las Matemáticas a los seguros; quizás por puro apetito intelectual o quizás porque le interesaban aquellas aplicaciones y tuviera relaciones profesionales con los actuarios suecos, que junto a los suizos eran los mejores de entonces. A fuer de sinceros, aquello de la matemática actuarial, me parecía una pesadez y la imagen del

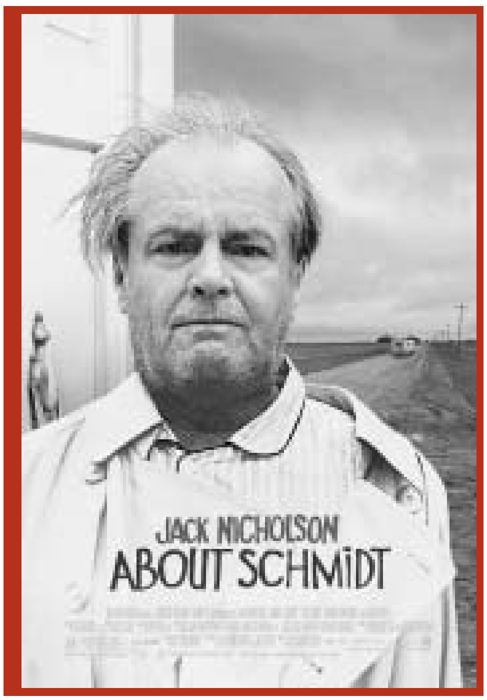
[3] Curiosa formar de referencia: se *es de*, no se *está en*, variable compleja, como si imprimiera carácter.

insigne Mittag-Leffler, en mi fundamentalista apreciación de entonces, perdió, tan sólo por eso, unos cuantos puntos. O se es puro, puro, pero puro, puro, o no se es.

Y hete aquí que tras los años, uno sigue siendo de Variable Compleja (insisto, parece que imprime carácter) pero aquí me tienen a punto de ponerme hablar, en cuanto rectifique este desliz de abuelo Cebolleta, sobre Matemáticas y seguros.

Uno no es actuario, ni profesional ni académicamente. El término actuario designa estatutariamente una profesión, y dice el DRAE que un actuario de seguros es:

> Persona versada en los cálculos matemáticos y en los conocimientos estadísticos, jurídicos y financieros concernientes a los seguros y a su régimen, la cual asesora a las entidades aseguradoras y sirve como perito en las operaciones de éstas.



Pero sí entiendo de riesgos financieros, a lo que dedico energías profesionales. Y mi interés profesional por la industria del seguro emana de la conjunción de técnicas entre esa industria y el mundo financiero. De esto hablaremos más adelante, pero vaya por delante esta llamada de atención para que nadie crea que usurpo funciones que no me son propias. Miraremos ese mundo actuarial desde las matemáticas y desde las finanzas.

La actuarial es una profesión con un tinte de aburrimiento. Ni los matemáticos ni los actuarios tienen buena imagen. Pero sus respectivas malas imágenes obedecen a distintas razones. No voy a comentar nada sobre la imagen de las matemáticas. *¡Nunca mais!* Pero a los actuarios se les percibe como aburridamente competentes. Algo de cierto podía tener esa percepción en el pasado cuando la actividad de la profesión tenía mucho de aplicar escrupulosamente reglas grabadas en piedra. Los tiempos, como es lo suyo y para eso son, están cambiando, y los mercados financieros y la demanda y oferta creciente de nuevos productos financieros de seguros están remodelando las destrezas que se requieren de un actuario.

Aquí nos acompaña el cartel de la película *A propósito de Schmidtt* en la que Jack Nicholson interpreta a un actuario que ...

Mi intención, repito, en esta charla[4] es describir qué tipo de matemáticas se usan en la industria del seguro, de cómo ésta está cambiando y qué nuevas matemáticas está demandando su desarrollo presente.

El azar

Los seguros permiten diluir la incertidumbre, el riesgo, los daños potenciales que se están asegurando entre un grupo de asegurados. Es casi mágico (bueno, matemático). Hay daños azarosos que pueden ascender a montantes destructores pero que asumidos *solidariamente* casi desaparecen. Los siniestros van a ocurrir, quién lo duda, no sabemos quiénes van a ser las víctimas pero sí que va a haber víctimas. No sabemos quiénes van a tener accidentes de automóvil, pero va a haber accidentes. Al asumirlos entre todos de forma solidaria, no desaparecen, pero sí los diluimos.

Viene a colación en este punto aquella comparación (de origen británico) entre los actuarios británicos y los actuarios sicilianos:

> –¿Saben ustedes cuál es la diferencia entre un actuario inglés y un actuario siciliano?
>
> – Un actuario británico sabe *cuántos* de sus asegurados va a morir durante los próximos seis meses, mientras que el actuario siciliano sabe *quiénes* de entre sus asegurados van a morir en los próximos seis meses.

El azar era –atención al tiempo verbal– dominio de los Dioses. Dice el escritor portugués Antonio Lobo Antunes que:

> Azar es el seudónimo que usa Dios cuando no quiere firmar.

Buscar reglas en el azar es casi una contradicción, ¿no? El azar es aquello que no podemos predecir. O mejor, no podemos predecir la ocurrencia individual: no sabemos si va a salir cara o cruz en el próximo lanzamiento de una moneda. Pero hay reglas, hay regularidades, pero éstas se refieren a la repetición, yacen en los grandes números, y no en lo individual. Si vamos a lanzar la moneda 100 veces, nos atrevemos a pronosticar, o simplemente a *esperar* que *más o menos* obtendremos cara *unas* 50 veces.

Contra los dioses es el apropiado título de la historia de como la humanidad se ha enfrentado al reto de ir dominado el riesgo, la incertidumbre. El autor de *Contra los dioses* es Peter L. Bernstein, un reputado inversor de Wall Street.

No es casual que el primer ejemplo que hayamos propuesto de azar sea de un juego, como cara y cruz. Las reglas de azar se manifiestan destiladamente puras en los juegos, claro, de azar. Al fin y la cabo, los juegos de azar son experimentos muy controlados en condiciones

[4] Un artículo de Hardy y Littlewood comienza con: “el propósito de este artículo es demostrar el siguiente resultado . . . ”; resultado que luego no se demuestra en el artículo.

constantes. La palabra azar, por cierto, proviene de la decoración con flores de azahar de los dados árabes. Y aleatorio, el término que recoge los sucesos o experimentos *regidos* por el azar, proviene del latín *alea*, dado.

No entendemos bien esto de la regularidad de las repeticiones en el azar. Me refiero a que hay muchas ilusiones mentales e intuiciones poco desarrolladas acerca de qué significa esta regularidad. Y si no lean esta conversación entre Athos, Porthos y Aramis, un día de plena canícula y de poca pendencia en las dependencias de los mosqueteros, en la que no debía haber otra cosa que hacer que lanzar al aire un Luis de oro y ver si caía de cara (del Rey) o de escudo.

> **Athos**— ¡Pardiez![5] Diez veces he lanzado este Luis de oro y, salvo en el tercer lanzamiento, ha salido la cara del Rey. La siguiente, para compensar, ha de ser escudo. Pues así lo dicta la Ley de los Grandes Números: en media han de salir tantas caras como escudos.

> **Porthos**— ¡Voto a bríos! ¡Vive Dios que sois mentecato! ¡Acaso creéis que la moneda recuerda lo que ha salido en los lanzamientos anteriores! No hay ninguna fuerza que obligue a la moneda: la Ley de los Grandes Números a la que apelas no es una ley física como la de la gravedad. Funciona justamente porque no hay nada que favorezca a la cara del Rey frente al escudo. Así que ahora, antes de lanzar la moneda, hay de nuevo la misma probabilidad de cara que de escudo. ¡Cuán fácilmente te seducen las apariencias!

> **Aramis**— ¡Por mi espada! ¡Porthos, no entremetáis a Dios en esto! Dilectos amigos, permitidme terciar en vuestra patética discusión. Porthos, vos sois el que os dejáis engañar: la realidad, lo único que sabemos, es que Athos ha lanzado la moneda diez veces y ha salido cara en nueve de ellas. Y, ya puestos, yo diría que la nariz del Rey es más pesada que el escudo. ¿Qué diríais si tuvierais una urna con rubíes y diamantes, de la que sacamos diez joyas al azar, obteniendo nueve diamantes y un único rubí? Sin duda, que la urna contiene más diamantes que rubíes. Lo mismo ocurre en esta caso: a la luz de la información disponible, deduciríamos que es más probable que salga cara en el siguiente lanzamiento de la moneda.

[6]

Cuesta detectar en un proceso dónde, cuándo o cómo ha intervenido el azar, si es que lo ha hecho. Y es que no es tarea fácil. O quizás sea imposible, y puede que todo sea deterministamente aleatorio y caótico.[7] En la película *El hombre que pudo reinar* basado en un relato de R. Kipling, le espeta Sean Connery a Michael Caine:

> Tu lo llamas suerte, yo lo llamo destino.

---

[5] ¿O dijo Par Dieu?

[6] Conviene quizás recordar aquí que tanto Aramis como Bayes eran eclesiásticos.

[7] Metafísico estamos, Sancho.

El Roto, ¡AY!, OPS

¿Destino, suerte? Nos consta que los chimpancés son buenos inversionistas en Bolsa. Pero somos exigentes, y no queremos un buen mono, queremos uno excelente (como inversionista en la Bolsa de Nueva York). Un proceso riguroso nos ha permitido seleccionar 1024 chimpancés con excelentes reflejos físicos. En la selección han participado cerca de veinticinco mil chimpancés. Como es bien sabido, para ser buen inversionista hacen falta excelentes reflejos. Las pruebas van a durar dos semanas, y si hace falta añadiremos algún día más. El primer lunes le pedimos a los 1024 chimpancés que pronostiquen, accionando una palanca en la que hay un plátano, si el índice Dow Jones (DJ) va a subir o va a bajar. Interpretamos, claro, que si el chimpancé sube la palanca al coger el plátano es que *piensa* que el DJ va a subir, y si la baja, pues eso. Los que no acierten quedan eliminados (es decir, son devueltos a su habitat natural). Cada día hábil repetimos la operación. *Esperamos* que en esas dos semanas sólo quede uno de los chimpancés. Este chimpancé habrá acertado los movimientos de la Bolsa de diez días de cotización sucesivos. Si no se ofendiera, diríamos que es un verdadero lince. Por supuesto, los pronósticos del chimpancé determinarán nuestra política de inversiones a partir de ahora.

Hace un par de meses, hubo un campeonato mundial de piedra, papel y tijeras. Sin comentarios.

Lo aleatorio es difícil de asir. Y lo aleatorio en sucesión más aún, aun cuando en la repetición yazga la esencia de la regularidad de lo aleatorio, y de que nos atrevamos a enfrentarnos a ella. Pero es que en realidad, no tenemos experiencia, y, consecuentemente, disponemos de poca intuición.

Pongamos que le pedimos[8] a un grupo de cien personas que *fabriquen* una lista aleatoria de longitud 500 formada por unos y ceros. Habrá dos métodos de *fabricación*, el legal y el tramposillo. Qué método de preparación va a usar cada uno va a depender de alguna característica muy personal que divide a la población en dos mitades aproximadamente, como, por ejemplo, la inicial del segundo apellido de la abuela materna. Aquellas de esas 100 personas para las que ese apellido comience por una letra desde la A a la G, han de preparar la lista *comme il faut*, es decir, lanzando una moneda equilibrada 500 veces y anotando un 1 si sale cara y un 0 si sale cruz. Los tramposillos, por imperativo legal, deberán *inventarse* la sucesión para que *parezca* aleatoria. En la práctica es fácil distinguir a los tramposillos de los legales. Y es que casi todas las sucesiones legales contendrán trozos de longitud 10 de unos consecutivos. De hecho, la probabilidad de que el azar genere una sucesión con esta característica supera el

[8]Este ejemplo está extraído del libro de John Allen Paulos; *A mathematician plays the market*. Aprovechamos para recomendar ¡vivamente! todos los libros de John Allen Paulos

95%.[9] Pero, reconozcámoslo, poca gente puesta en la tesitura de *fabricar una lista aleatoria* anotando unos y ceros se atrevería a poner 10 unos seguidos, ¿verdad?

O si se quiere, y dándole la vuelta, cuánta significación le damos a que un jugador está *en racha*, y le buscamos una razón causal, cuando en realidad no es sino lo que dicta el puro azar.

Algunos comentarios al paso sobre la innovación financiera y el (mefistofélico) mundo que viene.

Pero vayamos ya al grano del tema que nos ocupa que es el salvaje azar, y las matemáticas que se han creado para entenderlo y *domesticarlo*, en el ámbito concreto de los seguros. No cabe más dilación porque en este mundillo no se permite. Para muestra, he aquí como da comienzo un texto de matemática actuarial de seguros de vida[10]

> La muerte en sí es un hecho seguro, tan sólo cuándo ocurre es un hecho incierto. Sea M la variable aleatoria que denota el momento de la muerte [...]

Todos usamos seguros, y es un mundo bien conocido aunque está evolucionando, y mucho. También, sabemos de inversiones financieras, y aquí sí que hemos visto cambios, innovaciones como los fondos de inversión o los fondos de pensiones. Pero hay mucho más.

Los variopintos ejemplos que a continuación detallo buscan familiarizar al lector con la amplitud de posibilidades que la innovación en seguros y en finanzas puede llegar a abarcar, para que así pueda percibirse más cabalmente el papel que podrían desempeñar las Matemáticas.

MERCADEO DE SEGUROS DE VIDA

Mercadeo de seguros de vida. La mayoría de la gente hace dos inversiones principales a lo largo de su vida: la compra de la vivienda y alguna forma de ahorro, de pensión complementaria, o de seguro de vida. Las viviendas se compran y se venden, y en este mundo que viene, los seguros de vida tendrán un mercado. Al fin y al cabo, un seguro de vida es un título financiero en el que una entidad se compromete a realizar unos ciertos pagos si se dan ciertas circunstancias. Y como tal instrumento financiero tiene un posible precio de compra y de venta. A mí me cuesta hacerme a la idea (sicológicamente) de un

[9] Es decir, más del 95% de las listas generadas de esta manera tiene al menos un trozo de 10 unos consecutivos.

[10] Como veremos, el mundo de los seguros se divide en seguros de vida, por una parte, y en los llamados seguros generales (que engloban seguros de automóviles, de hogar, etc.

tal mercado, porque esto supone que habrá gente especulando con esos seguros de vida, es decir, con *mi* seguro de vida, con *mi* vida. Y, de nuevo, cuesta pensar en un seguro de vida como en una inversión. Pero de esto hablaremos más, más adelante.

Hipoteca inversa. La otra gran inversión es la vivienda. En los tiempos que corren, la mayoría de la gente precisa varias vidas completas de ascética y austera continencia para completar el pago de la vivienda.

Pero ya se avecina el tiempo en que irremediablemente amalgamemos estas dos inversiones principales. Una innovación financiera que ya empieza a gozar de cierto mercado en los países anglosajones y que veremos pronto por estos lares, y si no me creen, tiempo al tiempo, es la llamada *hipoteca inversa*.

En una hipoteca inversa el propietario de una vivienda acuerda con una contraparte (que no será un particular, sino una empresa creada para gestionar este tipo de contratos) el siguiente intercambio.

Se estipula que el dueño de la vivienda recibe una mensualidad que se actualiza según el índice de precios al consumo, es decir, que se ajusta por inflación para mantener un poder adquisitivo (y, por ende, ayude a mantener un nivel de vida). La vivienda sigue siendo de su propiedad, aunque es de suponer que con ciertas restricciones sobre obras y con ciertas obligaciones de mantenimiento.

Y ahora el otro lado: cuando fallezca el actual propietario que había contratado esa hipoteca inversa, la propiedad pasa a la contraparte.

Desde el punto de vista legal los contratos de esta naturaleza son complejos; ténganse en cuenta herencias y testamentos, las restricciones de derecho de propiedad a que aludíamos más arriba. Desde el punto de vista de valoración, las hipotecas inversas son un reto. Valoración refiere aquí a determinar la mensualidad que debe recibir por el propietario. Son contratos, ¡toquemos madera!, a largo plazo. Lo que recibe la contraparte es incierto, una vivienda cuyas condiciones de habitabilidad no son seguras, cuyo valor en mercado dependerá en ese momento futuro de múltiples circunstancias que van desde el punto del ciclo económico, del propio ciclo de construcción y demanda de viviendas, hasta la evolución del precio de la vivienda en la zona donde se encuentra la que nos concierne. Y todo eso unido a la incertidumbre del momento en que la vivienda pasa a ser propiedad de la contraparte, es decir, del fallecimiento del actual propietario.

Así que lo que se propone es que la gente se pase media vida comprando la vivienda, con las renuncias que esto pueda suponer, para luego ir vendiéndola, para, quizás, renunciar a menos cuestiones materiales, o al menos asegurar un nivel de vida.

Una sociedad muy estructurada e interconectada, no nucleada en familias, de individuos ¿más egoístas? que programan sus finanzas para no dejarse nada por consumir, y en la que los descendientes ya no son herederos de bienes materiales. De acuerdo, pero sí podría tener una función social real, fundamentalmente, eso sí, para la clase media.

En cualquier caso, y abandonando alardes de racionalidad, a mí me sigue sonando a un contrato mefistofélico.

Madame Recamier, epítome del ingeniero financiero. El concepto que subyace a la hipoteca inversa es más general: se trata de *ir* disfrutando (exprimiendo hasta la última gota) los bienes más preciados *en vida*.

Paul Auster publicó en el 2003 su *Libro de las ilusiones*. Uno de los personajes centrales de esta novela, profesor universitario, recibe el encargo de traducir las *Memorias de ultratumba* de Chateaubriand. Paul Auster nos cuenta la historia que recojo a continuación, con alguna información adicional para situarla como ilustración del tema que nos ocupa.

Chateaubriand vivió desde 1768 a 1849, y estuvo redactando estas memorias nada menos que desde 1809 hasta 1841. El título refiere a que Chateaubriand había decidido que no se publicarían en vida, y, efectivamente, así fue. La razón de su decisión parece clara: quería disponer de la mayor libertad posible para poder decir lo que pensaba y, supongo, para despacharse a gusto.

Chateaubriand, en plan romántico

Cuando comenzaba la redacción de sus memorias, tras su intensa actividad política, la situación económica de Chateaubriand distaba de ser boyante, digamos, usando la expresión al uso, que había caído en desgracia. Situación a la que no ayudaba que su principal actividad productiva fuera escribir un libro del que (económicamente) no se iba a aprovechar.

Chateaubriand frecuentaba el salón de madame Recamier. Mujer de fino y práctico intelecto, la Recamier pergeñó la siguiente estrategia financiera para el beneficio de Chateaubriand. He aquí su idea.

Se creó una sociedad para la emisión de unos títulos que daban derecho a percibir una fracción de los réditos a los que diera lugar la publicación de las susodichas memorias. Así se hizo. La venta de los títulos fue un reconfortante bálsamo para las maltrechas finanzas de Chateaubriand.

Obsérvese como en estos curiosos títulos, tal y como ocurre con las hipotecas inversas, parte de los pagos pactados se reciben a futuro y dependen de muchas variables: del momento de la muerte de Chateaubriand, del interés que estas susciten entonces, del momento económico en que ocurra esto. Muchas variables, muy difíciles de aquilatar.

Chateaubriand aguantó mucho. Y sobrevivió a alguno de los que habían comprado esos títulos. Alguno de los inversores revendieron sus títulos, dando lugar a un (pequeño) mercado secundario. Por cierto, ¿qué impuestos habría que imponer al patrimonio que supone la posesión de tales títulos?

Ingeniosa y mefistofélica (y algo maquiavélica, también) la Recamier: fina ingeniería financiera.

El nuevo orden financiero de Robert Shiller. En un interesante y reciente libro, *The New Financial Order*, el afamado economista Robert Shiller, catedrático en la universidad de Yale, propone nuevos instrumentos financieros que permitirían transferir y cubrir distintos tipos de riesgos financieros, pero no a través de mutuas o de aseguradoras (con las que nos sería viable), sino en negociación abierta. Shiller nos propone instrumentos financieros tales como

- *Seguros para el valor de las viviendas y para el nivel de vida.* Una innovación que ya está haciendo su aparición. Se trata de tener *índices* que recojan una suerte de precio medio o de referencia de los precios de cierto tipo de viviendas en ciertas zonas. Esos índices y opciones sobre ellos se negociarían en mercados abiertos, como hace MEFF con el índice Ibex. Una opción *put*, o de venta, es un contrato que paga a su comprador la diferencia entre el valor del índice y un precio prefijado, de manera que asegura a su comprador un precio de venta de su vivienda.

  Algo similar, aunque más complejo, se ha en cuanto al nivel de vida.

  En la práctica, estos contratos financieros son contratos de seguros pero de un naturaleza distinta porque la incertidumbre que se quiere gestionar, transferir, diversificar es una incertidumbre asociada a movimientos de mercado.

- *Préstamos ligados al salario.* Algo tan natural y tan social como ligar el montante de los pagos periódicos de intereses y capital al salario del prestatario. El préstamo es el préstamo, pero una reducción de salario supone una reducción automática del montante de los pagos periódicos que, naturalmente, cuyo vencimiento se alargaría en el tiempo. Tengo leído que el código de Hammurabi ya incluía cláusulas de este tipo, en concreto que si la cosecha era mala, los agricultores no tenían que devolver el préstamo ese año.

- Mercados donde se negocien contratos que permitan proteger inversiones ante *movimientos adversos de variables macro económicas.*

y otros varios, como

- Sistema de seguridad social inter-generacional, y no como el actual sistema en que las pensiones de un año se pagan esencialmente con los impuestos recaudados en ese año.

- Acuerdos internacionales para controlar los riesgos financieros de los países: ¿Mutua de seguros formada por países?

Este mundo globalizado nos puede traer este tipo de innovaciones financieras en las que, ¡oh, paradoja!, los mercados financieros pudieran servir de garantes sociales, de pilares del estado de bienestar.

Tenga el lector, por favor, estos ejemplos en mente cuando abordemos ordenadamente los seguros de vida, y otros instrumentos financieros que en su día fueron innovaciones innovaciones financieras de función social.

Seguros: Vieja Innovación Financiera

Una mutua de seguros consiste, en esencia, de un grupo de personas que previsora y solidariamente hacen aportaciones a un fondo común para con él compensar los siniestros, defunciones, etc. que pudieran ocurrirles. Solidaridad es la palabra clave. Una mutua es pues una cooperativa. Los beneficios que pudiera tener la mutua por buena gestión, buen cálculo actuarial, etc., revierten a la mutua, a la cooperativa.

Una compañía de seguros es una empresa, con ánimo de lucro, que se establece para ofrecer al´público general esos mismos servicios.

Esto de los seguros, de las mutuas y de las compañías de seguros, viene de antaño. Cuenta la tradición, y nos viene aquí al pelo, que ya los Collegia de Roma, en el 133 antes de Cristo, tenían un esquema de mutua de seguros de vida. Es de suponer que este esquema simplemente consistiría de un sistema de aportaciones que iba creando una bolsa, un fondo del que se pagaba a las familias de los miembros fallecidos. No habría, seguro, ningún cálculo propiamente probabilístico, aunque dada la extraordinaria capacidad de los romanos para la ingeniería, es fácil suponer que alguna estimación del tipo: somos siempre unos 100 miembros, y cada año se mueren como unos cinco, si queremos que cada familia de fallecido reciba tanto debemos aportar anualmente tanto.

Parece que ya había contratos de reaseguro, es decir, de seguros de seguros, en la tan mercantil República de Génova del siglo XIII, lo que da una idea de cuán técnicamente compleja y avanzada era su estructura comercial.

Pero las primeras compañías de seguros nacen más tarde. Uno de los primeras compañías (en seguros generales) es la alemana *Hamburger Feuerkasse*, fundada en 1670, que todavía existe, y que nació tras los devastadores incendios que sufrió Hamburgo en 1672 y 1676. Y otra, ya en el ramo de seguros de vida, es la *Amicable or Perpetual Assurance*, de delicioso y conmovedoramente utópico nombre, fundada en 1706.

Los seguros fueron en su día una extraordinaria innovación financiera, tanto por la vertebración social que generó la asunción mutual de riesgos como por el impulso que la contratación de seguros, como mecanismo de transferencia de riesgos, supuso para el desarrollo del comercio.

Quisiera insistir en la importancia, osadía, innovación y relevancia que supone la mera idea de que confiando en leyes de grandes números se puede diseñar un esquema por el que un grupo de personas se anticipa solidariamente a los inevitables siniestros que les pudieran afectar individualmente. Ya se que es simple, en apariencia, pero, ¿no es formidable que la solidaridad en libertad de una comunidad se apoye en la ciencia matemática para afrontar adversidad y riesgos?

Edmund Halley, promotor de la Royal Society y quien da nombre al más famoso y recurrente de los cometas, fue el responsable de la publicación de una de las primeras tablas de mortalidad de las que se tiene noticia. Para la elaboración de esas tablas se utilizaron los meticulosos registros sobre las edades, y otros datos, de los fallecidos en la ciudad de Breslaw, entonces del reino de Bohemia y ahora en Polonia, con el nombre Wroclaw. Información estadística de primera.[11]

[11] Las tablas fueron elaborados por Carl Naumann con el objetivo explícito, tan relevante para nuestra dis-

Supone ya percibir que había cierta regularidad, en condiciones normales, en los fallecimientos: enfrentarse con la aleatoriedad (y arbitrariedad) de, nada menos, que la muerte, territorio y dominio de los dioses. Las tablas se publicaron en 1693 con el título de *An estimate of the degrees of the mortality of Mankind, Drawn from Various Tables of Births and Funerals at the City of Breslau.* Las tablas tienen un papel similar (aunque no equiparable) al desempeñado por las observaciones de Tycho Brahe.

de Moivre, con expresión adusta

En 1725, Abraham de Moivre ya ponía este tipo de información estadística a buen uso. De Moivre, matemático de fecunda creatividad en varias disciplinas, publicó entonces *Annuities for life.* El objetivo fundamental del libro, y que le da título, es el cálculo de rentas vitalicias: la prima o primas que en una mutua tiene pagar cada asegurado durante un cierto tiempo para a partir de un cierto tiempo ulterior recibir una renta fija hasta su muerte.

De Moivre ya buscó leyes, asimilables, salvando distancias, a las leyes de Kepler, para dar estructura a la mortalidad. Su ley, ingenua, pero simple y punto de partida de otras más precisas, daba forma a la frecuencia (o probabilidad) de que una persona de una determinada edad fallezca, la llamada fuerza de la mortalidad (obsérvese la terminología física).

Experto como era en la fuerza de mortalidad, de Moivre, en alarde introspectivo, fue observando, y así se lo comunicó a algún amigo, que cada día dormía un poquitín más, y de hecho, minucioso y metódico, computó ese incremento diario. Y, claro, extrapoló y calculó también que, si se mantenía ese ritmo ascendente de necesidad de sueño, en tal fecha ya dormiría las 24 horas. En efecto, fiel a sus pronósticos, en ese fecha se murió. *Si non e vero ...*

Algunos artistas matemáticos y sus conceptos

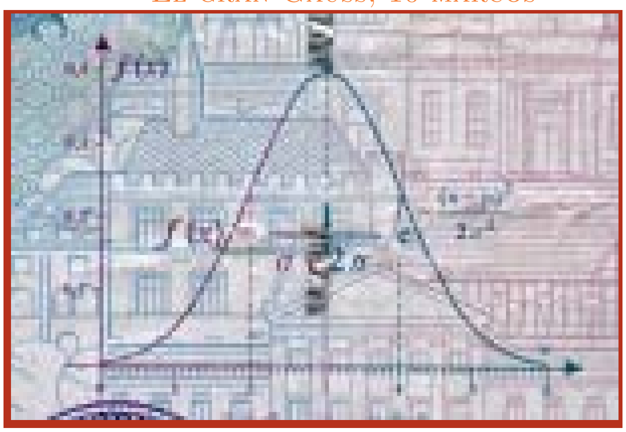
Los teoremas de límite: las Leyes de Grandes Números y el Teorema del Límite Central, son centrales, ¡cómo no!, en la aplicación de las Matemáticas a los seguros.

Pero es que, además, conceptos tan fundamentales como la esperanza y la desviación típica se concibieron pensando en el cálculo de primas y en la estimación del riesgo o de la incertidumbre, y desde un comienzo se aplicaron a contratos de seguros.

cusión, de criticar la creencia, común entonces, de la influencia de las fases de la luna sobre la salud en general. Naumann se las envió a Leibnitz quien a su vez las remitió a Halley quien las publicó en el *Transactions of the Royal Society.* Y todo con total naturalidad: ciencia global.

Christiaan Huygens, que ya usaba la Ley débil de los Grandes Números (casi como definición del concepto de probabilidad) definió el concepto de *expectatio*, de esperanza, la noción de valor esperado, justamente para definir la prima justa para participar en un juego. El modelo que empleó para darle un marco a ese concepto es fundamento de la valoración, del cálculo de primas, en la industria del seguro. Daniel Bernoulli ya concibió la desviación típica como medida de la incertidumbre y determinó su papel complementario al de la esperanza en cuanto a la valoración.

El gran Gauss, 10 marcos



La normal, 10 marcos

El padre del anterior, Johann Bernoulli, es, por su parte, responsable de la primera demostración de la *Ley (débil) de los grandes números*.

De Moivre, quien ya apareció en estas notas como uno de los pioneros en el uso de la teoría de la probabilidad aplicada al cálculo acturial, Laplace del que conviene recordar su brillante y aún interesante *Tratado filosófico sobre las probabilidades*, en el que encomiaba el uso generalizado de modelos y técnicas probabilísticas para las más diversas aplicaciones sociales de las Matemáticas, incluyendo los seguros, y el gran Gauss dieron forma al *Teorema del Límite Central.*

El teorema del Límite Central nos dice, en nuestro contexto y sumariamente, que las desviaciones independientes de una media se compensan a la larga siguiendo una distribución de probabilidad única y concreta, la normal. El Teorema del Límite Central permite estimar las desviaciones respecto de la media, lo que resulta esencial para gestionar la solvencia de la compañía de seguros.

Primas y Esperanza. *Ch. Huygens.*

Veamos en acción a la esperanza en el cálculo de primas. Todavía es una prima teórica, que se denomina prima pura.

Razonemos con Huygens, y asumamos el papel de gestor de la compañía aseguradora. Supongamos que tenemos $N = 10000$ seguros concedidos para cubrir un cierto tipo de siniestros. Cierta estadística previa nos invita a suponer que los pagos potenciales *por asegurado* en un periodo de tiempo fijo, digamos de un año, vienen dados por una cierta variable aleatoria X. Esta variable X tiene media, *esperanza*, μ.

Para darle estructura matemática a la cuestión, vamos a asignarle a cada asegurado su propia y específica variable que registra los pagos potenciales por siniestros que la compañía habrá de hacerle. Denotemos estas variables por X_i, donde el índice i recorre los distintos asegurados desde 1 hasta 10000. Cada una de estas X_i sigue la misma distribución que X y son *independientes*. Los pagos totales que tiene que hacer la compañía aseguradora (en un año) ascenderán a un total (aleatorio) de

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = \text{ pagos totales}$$

La Ley de los Grandes Números nos dice que, casi con seguridad,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \approx \mu$$

o, si se prefiere,

$$\text{pagos totales} \approx N \times \mu$$


Ch. Huygens

De manera que resulta equivalente recibir del conjunto de asegurados la cantidad fija, determinada, segura, $N \times \mu$, a pagar los siniestros (y otros gastos de gestión, administración, etc., que ya podíamos suponer incorporados a la variable X) que son una cantidad incierta, indeterminada, aleatoria. Así que, si cada asegurado aporta la parte alícuota μ de la cantidad $N \times \mu$, esperamos que el total recaudado equivalga al montante total de los siniestros. En otras palabras, la prima justa debería ser

$$\text{prima justa} = \mu$$

No olvidemos, que el argumento anterior sólo nos dice que cuando el numero de asegurados es muy grande, entonces el pago medio por siniestros estará muy próximo a μ.

Este argumento (y, de hecho, ese es su origen) se usa también para determinar la tarifa justa para participación en un juego de azar, siempre y cuando aceptemos que el juego se va a repetir un número grande de veces, número potencialmente infinito, lo que, por supuesto, es mucho suponer. La X_i sería los premios potenciales a recibir en la jugada i-ésima.

Riesgo. Desviación típica. *D. Bernoulli.*

Bernoulli, Daniel, introdujo la desviación típica y la varianza para medir explícitamente la incertidumbre y el riesgo en los juegos de azar, y poder así tomar decisiones sobre su conveniencia y sobre su *utilidad*, más allá del valor medio de los premios, que resulta insuficiente. El artículo de Daniel Bernoulli lleva el osado e incitante título de *Specimen theoriae novae de* *mensura sortis*, y fue publicado en San Petersburgo en 1738. La claridad de su exposición y el argumento de modelización son realmente brillantes: una lectura actual y muy recomendable, un clásico, vamos. Hay traducciones al inglés y al castellano de fácil acceso en la red. [12]

Daniel Bernoulli

Riesgo e incertidumbre. Veamos cómo usamos la desviación típica para medir el riesgo y cómo usamos esa medida para comparar.

Primero, consideraremos dos *juegos*. En el primero de ellos la apuesta es de 10 € y se nos ofrecen premios de 9 y de 11 € con probabilidades del 50%. La tarifa es justa pues el premio medio es de 10 € .

El segundo juego, por el contrario, exige la misma apuesta de 10 €, pero ahora sus premios son de 0 y de 20 €(doble o nada) también con probabilidades del 50%. La tarifa de este segundo juego vuelve a ser de 10 €. Es claro, que el segundo tiene más incertidumbre sobre el resultado.

Por si lo de los juegos se considera poco serio, pongamos ahora que tenemos dos *inversiones*. La primera nos ofrece una rentabilidad segura de un 4% en un año. Obsérvese que se trata de una rentabilidad segura, no hay incertidumbre, desviación típica de cero.

La segunda inversión, por el contrario, ofrece, con una probabilidad del 50%, una rentabilidad del 108% (lo que supone más que doblar el capital en ese año, pero, también tiene una probabilidad del 50% de que se pierda toda la inversión. De nuevo, aunque las dos inversiones nos ofrecen la misma rentabilidad en media, la segunda tiene mucho más riesgo que la primera.

El riesgo de un juego o de una inversión que tiene premios o pagos especificados por una variable aleatoria X se ha venido cuantificando desde Bernoulli mediante la desviación típica de X. Cuánto más dispersos son los valores, más incertidumbre hay sobre el resultado. Y esa incertidumbre se entiende como riesgo. Atención, algo que baja con seguridad, no tiene riesgo; algo que sube, pero no se sabe cuánto, tiene riesgo.

Primas y riesgo. Cuando se calcula la prima de un contrato de seguros, sobre todo, de un seguro general, se tiene en cuenta no sólo la esperanza, que se conoce como *prima pura*, sino que se le añade una cantidad que sirve de colchón de seguridad para *protegerse* de las oscilaciones alrededor de la media que pudiera tener el montante de los siniestros. La cantidad en cuestión se especifica en función de la desviación típica. En ocasiones se le añade la desviación típica, otras veces la varianza, y otras aún una combinación de las dos, otras [...]

Veamos como opera esta idea. Supongamos que nuestras estadísticas y análisis previos nos dicen que la variable que registra las pérdidas potenciales de un asegurado vienen dadas por una variable Y, que tiene esperanza, μ y desviación típica σ. De nuevo, cada asegurado

[12]Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (5, 175-192, 1738).

lleva su copia Y_i de Y. Esto significa que los asegurados son homogéneos.

El montante total de pérdidas (o pagos por parte de la aseguradora) viene dado por

$$Z = \sum_{i}^{N} Y_i \,.$$

Nos interesa determinar una prima ν algo mayor que la prima pura μ, para que sea poco probable que lo cobrado por el total de las primas no baste para cubrir los pagos a realizar por los siniestros. Es decir, queremos que

$$\mathbf{P}\left(Z > N\nu\right) \text{ pequeña}$$

Por el teorema del Límite Central (cuando el número N de asegurados es grande, etc.), Z es aproximadamente una variable normal de media $N \times \mu$ y desviación típica $\sigma \times \sqrt{N}$. Supongamos que la prima cobrada es $\nu = \mu + \sigma$. Entonces

$$\mathbf{P}\left(Z > N\left(\mu + \sigma\right)\right) = \mathbf{P}\left(\text{Normal estándar} > \sqrt{N}\right)$$

que, en efecto, es una probabilidad muy pequeña.

Encuentros en las fases actuariales

Tradicionalmente, y por razones de peso, la propia industria del seguro y la matemática actuarial asociada, se ha dividido en la rama de seguros de vida y la rama del seguro general (autos, hogares, ldots).

En la rama de vida las distribuciones de probabilidad de pagos por fallecimiento sobre un gran número de asegurados están muy concentradas alrededor de la media, y en este caso, las Leyes de los Grandes Números centran el cálculo de primas y de márgenes de solvencia en las medias o esperanzas. Las tablas de mortalidad son casi una predicción exacta, hay poco riesgo técnico o actuarial y poco riesgo financiero. Aunque hay que decir que el riesgo técnico y el riesgo financiero son hoy en día más relevantes.

En la rama del seguro general, por el contrario, las distribuciones de probabilidad son mucho más dispersas y cambiantes y la desviación típica, o como cambia ésta con el tiempo, pasa a primer plano. En la rama de vida, a la postre, el cálculo actuarial es casi determinista. Mientras que en el seguro general se necesita cálculo de probabilidades de variables aleatorias y de procesos estocásticos para incluir ciclos y cambios de régimen.[13]

En la actualidad, las entidades de seguros ofrecen contratos de seguros que abarcan los anteriores y que suponen un cambio radical en las técnicas, los conceptos y los modelos y que, en consecuencia, están transformando la profesión actuarial. Incluso qué se entiende por asegurable está abierto al debate. La fuente de estos cambios es la hibridación de lo actuarial con lo financiero. Se habla de protección financiera, pues las entidades de seguros ofrecen ahora

[13]Régimen probabilístico, se entiende.

una cobertura de riesgos que abarca seguros de vida, seguros de pensiones, fondos de inversión, seguros generales, seguros personal de desempleo; en suma, la entidades aseguradoras pretenden ofrecer una protección financiera global. Además, al ofrecer este abanico tan amplio y completo, las inversiones que las compañías de seguros acometen con las primas que recaudan se exponen a riesgos financieros adicionales.

Uno de los más preclaros exponentes académicos del mundo de los seguros, el suizo H. Bülhman, como heraldo de los nuevos tiempos, se apresuró alborozado al encuentro en la tercera fase. La primera fase trataría de los seguros de vida y la segunda de los seguros generales.

En lo matemático, la primera fase es pura Leyes de los Grandes números. La segunda fase usa del teorema del Límite central y estimaciones precisas del grado de convergencia, de la distribución de Poisson y de sus mixturas y composiciones, para compaginar número y cuantía de siniestros y ciclos. Los modelos, retrospectivamente, parecen sencillos, con pocas variables, con poca relación entre ellas y asequibles al cálculo.

El nivel matemático de la tercera fase sube unos peldaños, hay procesos estocásticos, calculo estocástico: de Ito y de Malliavin, y la modelización práctica es mucho más compleja, con probabilidades de origen actuarial que se extraen de estadísticas y con probabilidades de mercado que se deducen de precios. Una modelización que reclama muchas variables interrelacionadas de manera compleja, con efectos de retroalimentación.

Primera fase: Las mutuas, los seguros de vida y las pensiones. Comparación con ahorro bancario.[14]

Así que vamos a seguir el planteamiento de Bühlmann e ir ilustrando el papel que desempeñan las Matemáticas en los seguros, recorriendo las sucesivas fases.

Uno puede ahorrar guardando el dinero en casa o depositándolo bien en un banco bien en una mutua. Y desde luego son tres formas muy distintas de ahorrar. A primera vista quizás podría parecernos que el banco y la mutua nos ofrecen servicios equivalentes, o al menos, muy similares. Nada más lejos de la realidad. Nuestro objetivo ahora es comparar distintas formas de ahorro y de seguros de vida en formatos bancario y asegurador, para así entender el concepto de mutua (y la subyacente solidaridad). La comparación es cuantitativa, claro, y nos permitirá ejercitarnos en nuestros primeros cálculos actuariales.

En esta primera fase vamos a acompañar a un individuo, al que llamaremos $\mathbb{K}$, y que curiosamente tiene la provecta edad de 47 años,[15] en su análisis de distintas fórmulas de ahorro y de seguros de vida tanto con entidades de crédito como con entidades aseguradoras. El análisis

[14] Adaptado de notas de R. Norberg de su curso *Life Insurance* de la London School of Economics. Lo que sigue no es un ejercicio de inter-textualidad, tan de moda, sino plagio sin descuento coloreado con algunas pinceladas localistas.

[15] La edad de 47 años es curiosa porque 47 es un primo conspicuo y no por ninguna otra razón que le lector pudiera entretener.

de $\mathbb{K}$ es cuantitativo y sus comparaciones nos mostrarán nuestros primeros cálculos actuariales al tiempo que exhibirán la diferencia entre el ahorro bancario y el esquema solidario de una entidad aseguradora.

Veamos cuáles han sido las conclusiones de los análisis de $\mathbb{K}$.

Depósito de un capital a plazo. $\mathbb{K}$ dispone de un capital que quiere ahorrar. Y se plantea prestárselo a un banco o a un aseguradora durante un tiempo y recibir el capital inicial con los intereses acumulados.

Banco. $\mathbb{K}$ dispone de un capital C. El tipo de interés al que le capitalizan en el *banco* si hace un depósito a 23 años es de 3,597%. Y el capital se transformará en CC:

$$CC = (1 + 0,03597)^{23} \times C = 200\% C$$

así que, doblaría el capital.[16]

Pero, se pregunta:[17] *¿y si me muero antes?* $\mathbb{K}$ se hace con una tabla de mortalidad y lee que llegará a 70 años con una probabilidad del 70%. Tras superar un cierto mareo existencial y convocando toda su energía racionalizadora, decide analizar esa eventualidad[18] a la Huygens. El planteamiento a la Huygens no le convence demasiado, al fin y al cabo, no va a repetir un número grande de veces el experimento crucial de vivir de los 47 en adelante.

La esperanza del ahorro por obtener resulta ser

$$CC = \begin{cases} 200\% C; \text{ con probabilidad } 70\% \\ \\ 0; \text{ con probabilidad } 30\% \end{cases}$$

lo que en media resulta en

$$140\% C\,.$$

una rentabilidad sensiblemente inferior al 200% anterior. De hecho, $\mathbb{K}$ calcula y observa que ese rendimiento es equivalente a un interés anual de tan sólo $1,474\%$

Mutua. $\mathbb{K}$ y 5 amigos de su misma quinta, de similar genética, hábitos y vicios, deciden formar una porra de ahorro, o en términos más finos, una mutua de ahorro. Todos aportan ahora un capital de C y acuerdan que dentro de 23 años lo ahorrado en común se repartirá entre los acertantes, ¡perdón!, entre los supervivientes.

Suponemos que las muertes dentro del grupo son independientes. Lo que va a recibir $\mathbb{K}$ es una variable aleatoria que puede tomar 7 valores distintos. Veamos.

La primera posibilidad es que $\mathbb{K}$ muera antes de los 70. Esto sigue ocurriendo con probabilidad del 30%. Y en este caso $\mathbb{K}$ recibe 0. Cuando $\mathbb{K}$ vive, hay 6 posibilidades, según el número de

[16] CC es dinero de dentro de 23 años, que presumiblemente no tendrá el mismo poder adquisitivo que el dinero de hoy. Es decir, en este análisis estamos haciendo caso omiso de la inflación.

[17] ¡Jo, qué día!

[18] La de morirse, se entiende

compañeros que sobreviven. Hay 5 intentos de morirse y un 70% de probabilidad de acierto:

$$\mathbf{P}\left(\mathbb{K} \text{ vivo, otros } j \text{ vivos}\right) = (0,70) \times \mathbf{P}\left(\mathbf{Bin}(5,(0,70)) = j\right) \qquad ^{19}$$

El valor medio (seguimos con el paradigma de Huygens) de lo que recibirá $\mathbb{K}$ es:

$$(0,70)\sum_{j=0}^{5} \mathbf{P}\left(\mathbf{Bin}(5,(0,70)) = j\right) \times \frac{1}{1+j} \times (6 \times 2C)$$

es decir, $0,9993 \times 200\% \times C$. un valor medio que es *casi equivalente al ahorro individual en el que se descartase la posibilidad de muerte.*

Por cierto, si las probabilidades de supervivencia individual fueran más bajas, sólo en una mutua muy grande se lograría un porcentaje tan alto.

Con todo esto, $\mathbb{K}$ entiende la *lección sobre la mutua y el banco*, pero opina que esto del depósito a plazo de 23 años supone apostar demasiado al futuro ese de los 70 años. Y que quizás convenga ir viviendo algo, un poquitín, (si puede ser, ¡oiga!) antes.

Esquema de ahorro. Rentas diferidas. De nuevo vamos a comparar el ahorro en el banco con el ahorro mutuo, o en una compañía de seguros. El esquema de ahorro que se plantea es el siguiente: anualmente,

- en los próximos 20 años $\mathbb{K}$ va a depositar 6000 €,
- y luego desde el año 21 en adelante, le darán una cantidad C.

Banco. Como antes, veamos primero qué ocurre si tratamos con el banco. Mantenemos ese tipo de 3, 0597%, tanto para capitalizar como para actualizar, en las dos ramas de flujos, la de los pagos que ha de hacer $\mathbb{K}$ y la de los cobros a recibir. Igualando las dos rama obtenemos la siguiente ecuación para C:

$$\underbrace{6000 \times \sum_{j=1}^{20} \frac{1}{(1+0,030597)^j}}_{\text{pagos}} = \underbrace{C \times \sum_{j=21}^{33} \frac{1}{(1+0,030597)^j}}_{\text{cobros}}$$

de la que se deduce que C será

$$15310,34\,€$$

Si nos olvidamos de los tipos de interés y de las correspondientes actualizaciones (lo que es mucho olvidar a estos plazos tan largos): observamos que $\mathbb{K}$ va a recibir $15310 \times 13 = 199034$ y que $\mathbb{K}$ pagará $20 \times 6000 = 120000$. No tiene mala pinta, opina $\mathbb{K}$.

[19] $\mathbf{Bin}(n, p)$ es la variable aletoria binomial que registra el número de éxitos en n repeticiones independientes con probabilidad p de éxito en cada una.

En seguida uno se da cuenta de que el cálculo anterior, desde la perspectiva de $\mathbb{K}$, es un poco falaz. La verdad es que los pagos que tiene que hacer $\mathbb{K}$ son bastante seguros mientras que los que ha de hacer el banco, sobre todos los finales, son de probabilidad baja. Incluso podría darse el caso, de que $\mathbb{K}$ pague todo lo acordado y que, a cambio, no reciba nada.

Compañía de seguros. $\mathbb{K}$ habla con uan compañía de seguros. En un análisis medio, y un tanto simplificador, pongamos que la llamada *fuerza de supervivencia* es de 97,8%. Esto quiere decir que cada año de la cohorte de edad de $\mathbb{K}$, sobreviven un 97,8%. O sea, que llegarán a los 70 años: $(97,8)\%^{23} \approx 60\%$. [20]

Si mantenemos el esquema de pagos de 6.000 € y cobros de 15.310,34 € , el valor actual, en media, de los pagos que haría $\mathbb{K}$ sería de 49.370,38 €, mientras que el valor actual de lo que recibiría sería de 72.460,32 €. Pero ahora, si $\mathbb{K}$ paga 6000 € , para que las dos ramas de pagos y cobros sean equivalentes para la mutua (con un número suficiente de asegurados similares), debe recibir

$$22470,80\text{€}$$

O, al revés, para seguir con el esquema de recibir 15310,34 € , la prima anual se reduce a 4.088,06 € ; una ventaja sustancial.

Seguro de vida. Una última posibilidad que quiere analizar $\mathbb{K}$ es la de un seguro de vida. Se trata en el fondo de ahorrar para otros. Conociendo a $\mathbb{K}$, el análisis siquiera de esta posibilidad le ha costado lo suyo.

$\mathbb{K}$ habla primero con una compañía de seguros. El contrato que estudia $\mathbb{K}$ es uno en que si muriera antes de los 67, entonces su familia recibe 60000 €. La mutua, que tiene otros 9999 asegurados en las mismas condiciones hace la siguiente cuenta para calcular la prima que $\mathbb{K}$ debe pagar cada año. Mantenemos los datos tanto de tipo de interés como de fuerza de supervivencia anteriores.

Mutua. La mutua *espera* cobrar (Grandes Números):

$$10000 \times \text{prima} \times \sum_{j=0}^{19} (0,978)^j \frac{1}{(1+0,030597)^j}$$

Mientras que *espera* pagar

$$10000 \times 60000 \times \sum_{j=1}^{20} \left((0,978)^j - (0,978)^{j-1}\right) \frac{1}{(1+0,030597)^j}$$

Tras equiparar ambas ramas, resulta una prima de

$$756,84\,\text{€}$$

[20] Por cierto, con esta hipótesis de fuerza de supervivencia constante a un nivel de 97,8%, llegarán a centenarios un 30% (y a los 200 años un 1%).

Banco. ¿Y el banco? ¿Qué nos podría ofrecer en este contexto? Bien poco; puesto que el evento de fallecimiento podría ocurrir enseguida, tendríamos que darle al banco ya los 60000 € .

Segunda fase: Probabilidad de ruina, margen de solvencia y reaseguros

Tenemos una compañía de seguros generales, digamos que asegura hogares. Los datos de años sucesivos y de la política comercial de la compañía nos dicen que podemos considerar que cada año se va a recaudar un montante total de primas de todos los asegurados que, en valor actual, es constante. Ese montante constante es P.

También, la experiencia, propia y de otras compañías, nos permiten afirmar que el total de los pagos por siniestros de un año (puestos en valor actual) siguen una distribución de probabilidad Z. Si ponemos

$$Y = Z - P\,,$$

tenemos el resultado neto del año. El resultado anual Y es una variable aleatoria, claro. Obsérvese que $Y > 0$ significa pérdidas. Por supuesto, (con el margen de seguridad añadido a la prima pura) las primas P que se reciben son tales que $\mathbf{E}(Y) < 0$.

En años sucesivos tenemos

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$$

que consideramos como variables aleatorias independientes (cada una con la misma distribución que la variable Y).

La compañía dispone de una *reservas* R. El análisis de la solvencia de la compañía comienza por estudiar la *probabilidad de ruina*. ¿Cuándo se produciría la ruina? En este modelo simplificado la ruina ocurre en el año n (o antes) cuando $\sum_{i=1}^n Y_i > R$. Nos interesa la relación entre R y $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i > R\right)$, o mejor, la relación de R con

$$\text{Probabilidad de ruina} = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i > R, \text{algún } \ n\right)$$

Nos interesa estudiar esa relación en las dos direcciones: fijado R, cálculo de la probabilidad de ruina; y, también, podemos buscar R para que la probabilidad de ruina no sobrepase un determinado nivel.

Un primer análisis se centra en la posibilidad de que en un año concreto las pérdidas superen a las reservas. La desigualdad de Pafnuti Chebychev y la independencia año a año nos asegura que para cualquier λ y $A > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i > \lambda\right) = \mathbf{P}\left(e^{\sum_{i=1}^n Y_i} > e^{\lambda}\right) \leq e^{-A\lambda}\mathbf{E}\left(e^{A\sum_{i=1}^n Y_i}\right) = e^{-A\lambda}\mathbf{E}\left(e^{AY}\right)^n$$

Si se escoge A para que $\mathbf{E}\left(e^{AY}\right) \leq 1$ entonces

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i > \lambda\right) \leq e^{-A\lambda}$$

Esto nos dice que si queremos fijar un nivel de reservas R de manera que la probabilidad de que las pérdidas agoten esas reservas sea, por ejemplo, del 1%, entonces debemos tomar R para que $e^{-AR} \leq 1\%$

Hay una desigualdad más fuerte y más útil para este objetivo que es debida al matemático, estadístico y actuario sueco Harald Crámer, y nos dice que

$$\mathbf{P}\left(\max_n \left\{\sum_{i=1}^{n} Y_i\right\} > R\right) \leq e^{-AR}, \qquad \text{si} \quad \mathbf{E}\left(e^{AY}\right) \leq 1$$

Esta desigualdad nos permite concluir que si escogemos un nivel de reservas R tal que $e^{-AR} \leq$ 1%, entonces la probabilidad de ruina no supera ese 1%.

La elegante desigualdad de Crámer merece que demos su *demostración*.[21]

Se trata de una demostración por inducción. Pongamos que la variable aleatoria Y es discreta y que puede tomar los valores y_j con probabilidades respectivas p_j, es decir, $\mathbf{P}\left(Y = y_j\right) = p_j$. Denotemos además las pérdidas acumuladas hasta el año n por $U_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$

Interesa comprobar que

$$\mathbf{P}\left(\max_n U_n > R\right) \leq e^{-AR}$$

Vamos a estimar esta probabilidad condicionando sobre las pérdidas del primer año y aplicando inducción, suponiendo que en el paso $n-1$ se cumple la desigualdad.

Así que

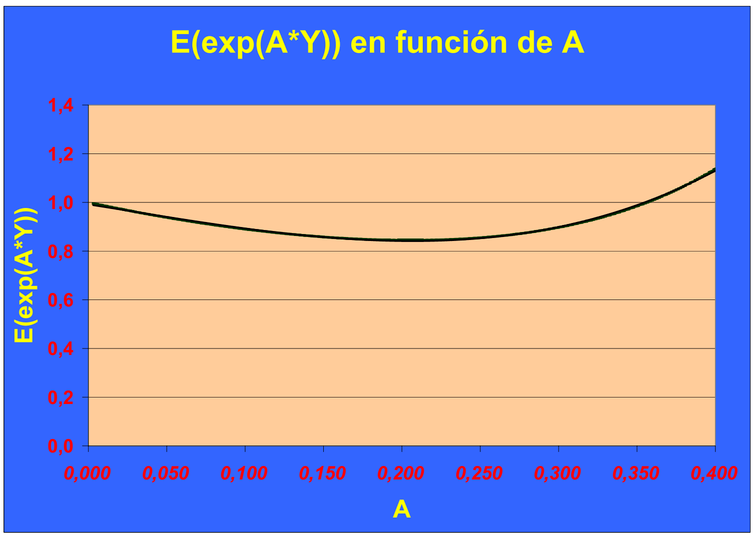
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max_{j \leq n} U_n > R\right) &= \sum_{y_j \leq R} \mathbf{P}\left(\max_{j \leq n-1} U_n > R - y_j\right) \mathbf{P}\left(Y = y_j\right) + \mathbf{P}\left(Y \geq R\right) \leq \\
&= \sum_{y_j \leq R} e^{-A(R-y_j)} p_j + \mathbf{P}\left(Y \geq R\right) = \\
&= e^{-AR} \sum_{y_j \leq R} e^{Ay_j} p_j + \mathbf{P}\left(Y \geq R\right) \leq \\
&\leq e^{-AR} \sum_{y_j} e^{Ay_j} p_j = e^{-AR} \mathbf{E}\left(e^{AY}\right) \leq e^{-AR}
\end{aligned}$$

---

[21] Cumpliremos así el *dictum* de que cualquier charla matemática ha de incluir al menos una demostración.

EJEMPLO. Supongamos que entendemos, tras nuestros análisis estadísticos, que $Z = e^X$, donde X viene dada por la tabla de la derecha, que $P = 3$ y que el montante de las reservas asciende a $R = 10$. El gráfico que sigue recoge la relación entre valores de A y valores de $\mathbf{E}\left(e^{AY}\right)$. El gráfico nos dice que el valor de A óptimo es $A = 0,3564$, (es decir, A es el mayor valor para el que $\mathbf{E}\left(e^{AY}\right) \leq 1$). Con el nivel de reservas anteriormente fijado, la cota que se obtiene para la probabilidad de ruina resulta ser $2,833\%$.

probabilidades	**valores de X**
1,56%	2,449
9,38%	1,633
23,44%	0,816
31,25%	0,000
23,44%	-0,816
9,38%	-1,633
1,56%	-2,449



PROBABILIDAD DE RUINA

Nivel de Reservas. Le podemos dar la vuelta al análisis anterior y preguntarnos qué valor deben tener las reservas R si queremos que la probabilidad de ruina no exceda, por ejemplo, $0,01\%$. Queremos que

$$e^{-0,3564 \times R} \leq 0,01\% \,.$$

Esto requiere que R sea de 25. Si tenemos en cuenta que la media de las ganancias es $\mathbf{E}(-Y) = 1,37$, este nivel de reservas es ingente.

¡Atención! Aquí no usamos leyes de los grandes números. Aquí no importa la media, sino los percentiles, las colas, de la distribución de ganancias. Si creyéramos que la situación en media fuera la que se va a dar (sin incertidumbre), no harían falta reservas. Ésta es, *grosso modo*, la diferencia entre seguros de vida y seguros generales, entre primera fase y segunda fase. Al fin y al cabo, el de primera fase es un análisis casi determinista.

Reaseguros. Las compañías de seguros cubren sus riesgos mediante reaseguros, es decir, suscriben pólizas con compañías reaseguradoras para que éstas les compensen en caso de que su nivel de siniestros sea excesivo. Cuando las compañías se reaseguran, su nivel de solvencia (la probabilidad de ruina) mejora.

Continuemos con el EJEMPLO anterior. Como antes: Z denota el importe de los siniestros y las primas son P. Así que el resultado es $Y = Z - P$.

Acordamos el siguiente contrato de reaseguro, en el que interviene un nivel de corte β, de manera que

$$\begin{cases} \text{si } Z > \beta; \text{ a la aseguradora le pagan } (Z - \beta) \\ \\ \text{si } Z \leq \beta; \text{ a la aseguradora le pagan } 0 \end{cases}$$

Por este contrato, la aseguradora le paga a la reaseguradora una prima Q. Obsérvese que la aseguradora tiene que pagar $(Z - \beta)^+$. Pero la reaseguradora exigirá (dado el nivel de riesgo que está asumiendo) una prima Q que sera mucho más que $\mathbf{E}\left((Z - \beta)^+\right)$, pongamos que exige

$$Q = 2 \cdot \mathbf{E}\left((Z - \beta)^+\right) \ .$$

La nueva variable que recoge el resultado de nuestra compañía de seguros durante un año es ahora:

$$\widehat{Y} = Z - P - \left((Z - \beta)^+ - Q\right)$$

que tiene en cuenta

- los siniestros Z,
- las primas P,
- los pagos potenciales que haría la aseguradora $(Z - \beta)^+$,
- y la prima Q que se ha de pagar a la reaseguradora

Mejora de nivel de solvencia, por reaseguro. Si, continuando con el EJEMPLO anterior, hacemos ahora la estimación a la Crámer, pero con $\widehat{Y}$ en lugar de Y, obtenemos que con las mismas reservas (y una β de 8) la probabilidad de ruina es a lo sumo $0,2899\%$; lo que supone una reducción sustancial.

Primera fase, grado 33: Esperanza de vida. Tabla de mortalidad.

Volvemos a los seguros de vida, que eran territorio de primera fase, y vamos a incorporar el riesgo técnico que supone la variabilidad de la tabla de mortalidad.

Tabla de tasa de mortalidad							
x	1000*qx	x	1000*qx	x	1000*qx	x	1000*qx
0	15,2	25	1,24	50	5,9	75	51,69
1	2,9	26	1,27	51	6,4	76	56
2	1,5	27	1,33	52	7	77	61
3	1,2	28	1,39	53	7,5	78	67,4
4	1	29	1,46	54	8,2	79	73,5
5	0,98	30	1,5	55	9	80	80
6	0,93	31	1,6	56	9,7	81	87
7	0,89	32	1,7	57	10,6	82	95
8	0,87	33	1,8	58	11,6	83	104
9	0,85	34	1,9	59	12,6	84	113
10	0,85	35	2	60	13,8	85	123
11	0,85	36	2,1	61	15	86	134,9
12	0,87	37	2,3	62	16,4	87	146,9
13	0,91	38	2,4	63	18	88	159,9
14	0,95	39	2,6	64	19,5	89	173,7
15	1	40	2,8	65	21,3	90	188,7
16	1,05	41	3	66	23,3	91	204,9
17	1,1	42	3,2	67	25,44	92	222
18	1,15	43	3,44	68	27,79	93	240
19	1,2	44	3,71	69	30,37	94	260
20	1,26	45	4	70	33,18	95	281
21	1,31	46	4,31	71	36,26	96	350
22	1,28	47	4,66	72	39,62	97	475
23	1,26	48	5,04	73	43,3	98	675
24	1,22	49	5,46	74	47,31	99	1000

Tabla de mortalidad

Las tablas de mortalidad recogen la estadística de fallecimientos. Si seguimos la evolución de una gran población, digamos de 1 millón, desde su nacimiento, la tabla, para cada año x, recogerá con una notación tradicional

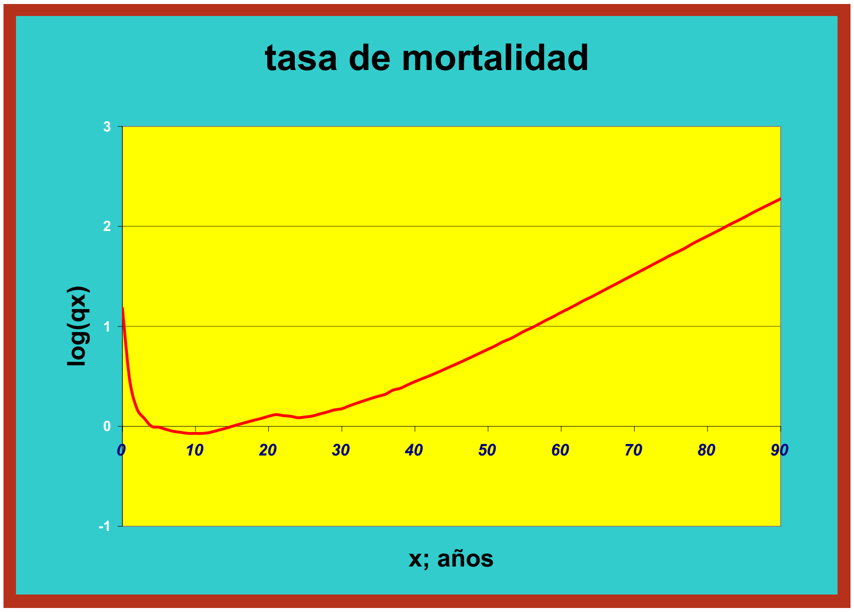
- v_x=número de vivos al comienzo del año x.
- d_x=número de defunciones durante el año x.
- $q_x = (d_x/v_x)$ frecuencia (o probabilidad) de fallecimiento en año x de una persona con x años.
- $p_x = 1 - q_x$ frecuencia con que las personas de x años viven un año más.

La tabla anterior recoge valores de q_x, que podemos interpretar como probabilidades condicionadas: q_x es la probabilidad condicionada de fallecimiento cuando se ha sobrevivido hasta x años.

El promedio
$$\sum_{x=0}^{\infty} x \frac{d_x}{v_0}$$
es a la vez la edad media al morir y la esperanza de vida.

Podríamos estimar la esperanza de vida de alguien que nace ahora recogiendo, por ejemplo, todos los fallecimientos habidos en, digamos los últimos cinco años, y observando las edades de los fallecidos. El valor medio nos daría la edad media al morir, es decir, la esperanza de vida. Pero esta es en realidad una inferencia *estática*. La premisa es que si la estructura aleatoria de los fallecimientos se mantiene, entonces ...

Pero podríamos ponernos más en modo *tercera fase* y pensar más *dinámicamente*. La cantidad q_x, la tasa de mortalidad para la edad x, no es estable y cambia con el tiempo. Para x grande, uno espera que q_x sea muy grande para valores grandes de x, de hecho, próximo a 100% para x próximo a 100. Si el tiempo de vida fuera una variable exponencial, la habitual de los tiempos de espera *homogéneos*, entonces q_x no dependería de x. En escala logarítmica tenemos la siguiente gráfica.



Tasa de mortalidad

Una idea para estimar como *evoluciona* la tasa de mortalidad es determinar qué estructura geométrica tiene, ajustándole una curva extraída de una familia paramétrica, analizar como han ido evolucionando los parámetros que la describen para, finalmente, proyectar hacia el futuro una evolución potencial de los parámetros y, por tanto, de la curva en sí. parámetros.

Uno de estos enfoques (Heligman and Pollard)[22] consiste en observar que la forma de la curva de tasa de mortalidad tiene 3 componentes, uno relacionado con el nacimiento, en que la tasa de mortalidad cae rápidamente, otro para edad avanzada en que la tasa de mortalidad es, en escala logarítmica prácticamente lineal, y un pequeño, y dramático, bulto alrededor de los 20 años.

Uno de estos ajustes que intenta recoger esa triple estructura viene dada por:

$$\frac{q_x}{1-q_x} \approx e^{-A(x+B)^C} + e^{-D-E(\ln(x)-\ln(F))^2} + e^{-G+Hx}$$

Se modeliza el cociente $\dfrac{q_x}{1-q_x}$ y no, directamente q_x, para asegurar que siempre tendremos $0 \leq q_x \leq 1$.

Tercera fase

Por fin, el ansiado encuentro en la tercera fase [23]: la modernidad. Se trata de la confluencia de lo actuarial con lo financiero.

La incertidumbre en los contratos de seguros tiene dos fuentes fundamentales. La primera es la incertidumbre que se denomina técnica, y es la que proviene de los eventos y siniestros que se

[22] *Modelling and forecasting mortality improvements*, Ligia Karina Acevedo y Ovando, Universidad de Waterloo

[23] ¿No escuchan de fondo la musiquilla aquella de cinco notas?

están asegurando, cuándo y cuánto tiene que pagar la aseguradora por los siniestros a ocurrir. Ésta es la incertidumbre que tradicionalmente ha manejado la práctica actuarial. Se trata de un tipo de incertidumbre que podríamos calificar de física. Si se dispone de buenas estadísticas de las frecuencias con la que ocurren distintos tipos de siniestros en un segmento de población y esas frecuencias se mantienen estables en el tiempo, es razonable utilizarlas para inferir la distribución de probabilidad con la que *van* a ocurrir los siniestros. Siendo éste el caso, las técnicas de cálculo de primas, nivel de reservas, etc. usando teoremas de límite (precisos) son suficientes para domesticar en gran medida la aleatoriedad y gestionar con solvencia la entidad aseguradora.

En realidad, las cosas no son tan sencillas. Por ejemplo, las distribuciones no son tan estables. La curva de mortalidad, como ya hemos comentado, es en sí misma estocástica. Es decir, la curva de mortalidad, que, al fin y al cabo, simplemente recoge los parámetros con los que se sortea en cada caso la mortalidad, es estocástica, y va evolucionando tendencia intrínseca. Y aunque varíe poco, el impacto es importante porque los contratos del área de vida, son por naturaleza a largo plazo. Por otro lado, las distribuciones de probabilidad que se usan en el área del seguro *general* son por su propia naturaleza más volátiles, más inciertas, sujetas a ciclos de variabilidad, ... Esta incertidumbre sobre las distribuciones a utilizar y sobre la propia volatilidad dentro de ellas se conoce como *riesgo técnico*.

Pero, además, hay una incertidumbre que podemos calificar como financiera, el *riesgo financiero* y que en tiempos era de menor relevancia en comparación con el riesgo técnico que controlaba la técnica actuarial, pero cuya importancia es ahora, quizá mucho mayor. Primero, los tipos de interés que aparecen para capitalizar y para descontar son ahora más inciertos que hace poco tiempo. Segundo, los productos de ahorro que ofrecen las compañías de seguros tienen hoy en día un importante componente financiero, es decir, los pagos a percibir por el asegurado se hacen depender de distintas variables que recogen comportamientos de mercados o movimientos de tipos de interés. En tercer lugar, y fundamentalmente, las compañías de seguros tiene que *invertir* las primas que recaudan en mercados financieros, y no sólo en Deuda del Estado, lo que conlleva riesgo e incertidumbre.

Ahora bien, el riesgo financiero es de naturaleza completamente distinta al riesgo técnico. La evolución de los mercados financieros no se rige por una probabilidad física, estable; creerlo es absurdo: las primas dependen de oferta y demanda, y el riesgo no se diversifica por la magia de los grandes números.

La Lotería Nacional y la Porra de "El Barril ". La valoración actuarial y la valoración financiera.

Quizás este digresión que sigue permita que nos hagamos una idea de la diferencia entre la valoración actuarial o estadística o a la Huygens y la valoración financiera.

Valorar consiste en relacionar la prima que se paga por adelantado con los flujos aleatorios que se recibirán a cambio en el futuro. Para valorar un contrato, buscamos un equivalente cierto, sin incertidumbre. Las Leyes de los Grandes Números diluyen la incertidumbre si hay muchos asegurados y tenemos bien aquilatada la distribución de pérdidas por siniestros.

Pero en contratos financieros lo mejor que podemos hacer es relacionarlos con otros contratos financieros cuyos precios sean firmes y transparentes. Se trata de la valoración por replicación: si un instrumento tiene los mismos flujos que una cartera de otros activos, entonces el contrato y la cartera de activos deben tener el mismo precio, si no hay oportunidades de arbitraje.

Una oportunidad de arbitraje consiste justamente en aprovechar la diferencia de precio entre dos instrumentos financieros que realmente tienen los mismos flujos. El ejemplo tradicional es el de una mercancía que al tener un precio bajo en una plaza, los costes de transporte compensarían ponerla en otra plaza donde se está vendiendo por un precio alto. En mercados transparentes, con buena información, las oportunidades de arbitraje *haberlas haylas*, pero duran poco, pues ya se encargan los arbitrajistas de aprovecharlas rápidamente. El arbitraje es una fuerza que obliga a un equilibrio (dinámico) de precios.

No se trata aquí de desarrollar una comparación técnica entre la valoración actuarial y la valoración financiera. Usaremos la porra del barril y las loterías nacional y primitiva para ilustra esa diferencia. Interesa que el lector se haga una idea sobre en qué se fundamenta esa diferencia que es necesario incorporar al cálculo actuarial (de tercera fase).

En la porra de *El barril* todas las apuestas son de 1 euro. La situación es la siguiente El 65% apuestan por la victoria de Y y el 35% por la victoria de Z. No hay otros resultados posibles: victoria de Y o victoria de Z. Como en todas las porras, lo apostado se reparte entre los acertantes que son 100 personas.

Históricamente, el 75% de las veces ha habido victoria de Y y el 25% restante de victoria de Z (aunque la verdad es que en los últimos 50 años se han enfrentado cuatro veces, la última hace 17 años). Hablar de estadística es insensato.
Junto al bar, pero fuera, un individuo del que tan sólo daremos, por razones que el perspicaz lector entenderá, sus iniciales O. T. C., nos ofrece una apuesta que consiste en que si gana Y nos paga 20 €y, sin embargo, si gana Z hemos de pagar $46\frac{2}{3}$ €. O. T. C. nos pide por esa apuesta 39 €¿Nos interesa?

Si usamos la historia y nos ponemos en modo Huygens (que como sabemos no es muy razonable, pero ¡qué caramba!, la tradición es ...), diríamos que el precio debería ser

$$20 \times (25\%) + 46\frac{2}{3} \times (75\%) = 40\,€$$

así que parece una oferta atractiva: podemos conseguir por 39 algo que podría valer 40.

Apuntamos ahora en otra dirección y comenzamos por observar que si gana Y, una apuesta por Y pagará $1/(35\%)$, y 0 si gana Z.

Veamos. Si tomáramos $20 \times (35\%)$ apuestas por Y y $46,66 \times (65\%)$ apuestas por Z, replicamos exactamente el contrato que nos ofrece O. T. C. El coste de esta replicación es:

$$20 \times (35\%) + 46,66 \times (65\%) = 37\frac{1}{3}\,€$$

Realmente lo que nos ofrece O. T. C. *se podría comprar* por $37\frac{1}{3}$ €, así que el precio de 39 C = parece menos atractivo. De todas maneras, aún así, por no entrar en "El Barril"y hacer ese montón de apuestas, quizás nos interese la oferta, pero sabemos que la diferencia entre 39 € y $37\frac{1}{3}$ € es comisión, digamos.

El precio justo resulta ser la esperanza de los pagos, como debe ser, pero la probabilidad a emplear no es la histórica o estadística, sino la que se destila de las opiniones de mercado.

Obsérvese que esa probabilidad es dinámica, en cuanto cambie la opinión de la gente y se hagan más apuestas, la probabilidad cambiaría.

Insistimos en estas ideas: comparemos la Lotería Nacional y la Lotería Primitiva, en cuanto a valoración, sobre todo desde el punto de vista de la ONLE.[24] Los premios de la Lotería Nacional están fijados, escritos en el reverso del décimo. En cada sorteo, la ONLE corre riesgo, porque podría darse el caso que sólo se vendieran unos pocos billetes y que resultaran premiados: la ONLE recaudaría poco y pagaría mucho. Escenario poco probable, de acuerdo, pero .... La ONLE sólo reparte en premios, por término medio, un porcentaje de cada billete. En cualquier caso, y aunque así no fuera, la repetición de sorteos y grandes números, compensarían los resultados de los sorteos. Y eso hace que la Lotería nacional sea un buen negocio para el Estado.

En la Primitiva, la ONLE no corre riesgos, funciona como una porra, excepto en que el organizador se queda con un porcentaje de lo recaudado y reparte el resto entre los acertantes. Los premios no están determinados en los billetes sino que dependen de cuantos apostantes haya habido, y, también, de cuantos acertantes haya habido. Porque si hemos acertado y somos el único acertante, es decir, si nadie más ha apostado lo mismo que nosotros, el premio es sustancial, pero si resultase que otras cien personas tienen la misma opinión que uno y rellenan la misma apuesta, nuestro premio es bastante menor.

Los premios en la Primitiva dependen de la opinión de los demás, tal y como ocurre en los mercados financieros.

Control del riesgo. Podríamos entender como riesgo asegurable aquel que queda atenuado o casi eliminado por la propia diversificación mágica que suponen las leyes de los Grandes Números.

En los contratos financieros, se elimina riesgo (en sentido estricto) por replicación con otros activos. La replicación es dinámica, es decir, que se va adaptando a la evolución de los propios mercados, y, por tanto, el control del riesgo también es dinámico.

El control de la incertidumbre es esencial en los seguros, pero al introducir ingredientes financieros, ese control requiere de paradigmas nuevos, considerablemente más complejos.

Las matemáticas y la realidad. Modelización y computación. El interés por la obra de Stefan Zweig, quien fue uno de los más afamados escritores y pensadores de entre guerras, ha resurgido recientemente. Una de sus novelas lleva el título de *Novela de ajedrez*. A continuación sigue un pasaje de esa obra.

> Los signos de aquel libro $a1, a2, c7, c8$, que me habían parecido tan abstractos al principio, se transformaban automáticamente en mi cerebro en las imágenes plásticas y visibles de las posiciones que representaban. La trasposición se había producido netamente: había interiorizado la imagen del tablero y de las piezas y me bastaba con mirar las fórmulas del

[24] Organismo Nacional de Loterías del Estado.

> libro para plasmar en mi mente la posición correspondiente, del mismo modo, quizás que un músico experto puede oír el acorde de unas voces con una simple ojeada a la partitura.
>
> [. . .]
>
> Había olvidado totalmente que se puede jugar al ajedrez con un tablero de verdad, con piezas de verdad; había olvidado que para jugar a este juego dos personas diferentes de carne y hueso se sitúan corpóreamente una delante de la otra .[. . .] Las fórmulas cifradas que había utilizado en mis ejercicios frenéticos no eran más que el sucedáneo y el símbolo de aquellas figurillas de hueso. Mi sorpresa al darme cuenta de que aquellos empujoncitos a unas figuras de un tablero eran lo mismo que mis devaneos por los espacios del pensamiento podía compararse a la de un astrónomo que a fuerza de cálculos complicados sobre un papel deduce la existencia de un nuevo planeta, y después lo ve realmente en el cielo, astro blanco, claro, sustancial.

El resumen nos lo ofrece *Juan José Millás*, otro pensador profundo, en una columna de El Pais:

> Los matemáticos no comprenden la realidad hasta que la encierran en una ecuación, pero los burócratas son incapaces de medir el tamaño de una catástrofe hasta que la transforman en un expediente.

La abstracción y las Matemáticas. Encerrar la realidad en ecuaciones (en sentido amplio), eso es modelizar. Y la modelización de estos temas financieros no es sencilla. Los sistemas económicos y financieros son muy complejos, incluso en el sentido que técnicamente tiene el término complejo en Matemáticas. Son sistemas con muchos grados de libertad, que no se adaptan a una modelización en términos físicos, donde la información desempeña un papel fundamental y donde los efectos de retroalimentacion son esenciales.

La potencia computacional de que ahora disponemos nos libera de la tradicional de limitarse a buscar modelos de sencillo tratamiento analítico. Y esto permite ser decididamente ambiciosos en la modelización.

La modelización de mercados financieros debe, por supuesto, ayudar a entender, pero también nos debe permitir ser capaces de analizar el efecto de acciones alternativas, para poder optimizar y tomar decisiones. En suma, podemos modelizar para disponer de un verdadero *laboratorio de lo complejo.*

En una recensión en el *Notices* de la AMS sobre el libro [25] *A new kind of science* de S. Wolfram el creador del programa informático *Mathematica* ©, J. Gray nos dice

> Most interesting problems presented by nature are likely to be formally undecidable or computationally irreducible, rendering proofs and predictions impossible. . . . Mathematicians and scientists have managed to keep busy only by carefully choosing to work on the relatively small set of problems that have simple solutions.

[25] Libro descomunal en tamaño, desorbitado en afirmaciones, megalómano hasta lo clínico.

> "Although it is true that, in the 300 years since Newton, most of theoretical science has been done using the rigorous, analytical approach, the reason for that is simply that that is the only kind of science *could* be done ... The lack of computational power meant that researchers could only answer questions that had clean, elegant solutions ... It is only now that we have the ability to do complex calculations and simulations that we are discovering that a great many systems seem to have an inherent complexity that cannot be simplified ... After another 300 years, we will no doubt feel as comfortable using computer simulations to analyze nature as scientists today feel using Newton's laws of motion to describe the trajectory of a falling stone."

G. W. Rowe, THEORETICAL MODELS IN BIOLOGY

El texto de la izquierda está extraído de la introducción de un libro sobre modelización y computación en Biología. El texto es del biólogo G. W. Rowe y refuerza el comentario anterior de Gray. La potencia computacional de la que ahora disponemos no sólo permite una modelización de otra naturaleza, sino que ciertamente obliga a ella: el órgano crea la función y no al revés.

La ciencia computacional está transformando la forma en que hacemos ciencia: un cambio de paradigma con sus nuevas ambiciones y sus nuevos retos. Esto no significa, ni mucho menos, que haya que abandonar nada. Siempre vienen bien los modelos muy estilizados, cerrados y calculables. Es más, son esenciales, sin ellos se va ciego, no hay forma de contrastar. La ciencia computacional forzará a entender en formas nuevas, más precisas en sus conclusiones y quizás más difusas en cuanto a las deducciones.

Un modelo de tercera fase: Pensiones

Como ilustración, vamos a plantear a continuación un modelo simple, novato, pero que apunta maneras. Es tan sólo un esbozo; lo que es relevante ahora no es el modelo sino la forma de aproximarse a la cuestión.

Supongamos que gestionamos *un plan de pensiones* de una cierta empresa con las siguientes especificaciones

- Cada uno de los empleados aporta al plan una fracción fija de su salario.
- Hay 3 niveles profesionales: A, B y C.
- La fracción que se aporta depende del nivel salarial.
- Las aportaciones de los empleados se invierten en los mercados financieros.
- El valor total del fondo va cambiando con el tiempo.
- En cada momento, cada partícipe del fondo es propietario de una fracción del plan, que se deduce del total de las aportaciones que ha hecho a este momento.

- Cuando un empleado deja el fondo (jubilación, invalidez, despido, cambio de trabajo, ...), retira del fondo la fracción personal de lo que vale el fondo en ese momento.
- La empresa, cada año, aporta al plan una pequeña y determinada fracción fija de sus beneficios.

El esquema para tener un buen modelo computacional de ese plan de pensiones que incorpore la mejor información para así tomar las mejores decisiones pasa por distintas etapas. Siendo muy analítico podríamos distinguir las tres siguientes

- *Modelización de las variables fundamentales que gobiernan la incertidumbre del plan de pensiones*. Esta es la parte de ingeniería matemática. Hay que conocer bien el contexto y traducirlo a matemáticas, al modelo. Como primer paso hay que seleccionar bien las variables relevantes y disponer de buenos datos. Aquí intervienen datos actuariales y datos sobre la evolución de la masa de empleados. Se requiere, además, buena modelización de la evolución de mercados financieros. El conjunto se ha de integrar bien, teniendo en cuenta la dependencia entre las distintas variables.
- *Determinar las alternativas de gestión.* Este es el espacio de acciones, de estrategias de gestión, que necesariamente son dinámicas, capaces de adaptarse a la evolución del contexto. Se debe parametrizar adecuadamente recogiendo las opiniones de gestores expertos.
- *Especificar el criterio para medir la gestión.* La descripción del estado del plan precisa muchas variables. La respuesta a la pregunta de qué es lo mejor para el plan, ha de traducirse en un criterio, que combinará varias variables y que habrá que optimizar en el espacio de acciones, es decir, escoger la estrategia de gestión óptima.

Modelización. Supongamos que el montante del fondo se invierte en depósitos a 1 año (renta fija) y en Bolsa (renta variable), en una cartera muy diversificada que replica fielmente el Ibex.

Nos interesa modelizar, por tanto, la evolución del tipo de interés a 1 año y la del índice Ibex.

Pensamos ya en simulación de procesos estocásticos, la simulación Montecarlo. Fijamos un plazo de tiempo Δt, pongamos por caso 3 meses.

Simulamos el tipo de interés R a 3 meses, el Euribor de plazo 3 meses, con un proceso de reversion a la media:

$$\boxed{R_n - R_{n-1} = a\,(\Omega(n) - R_{n-1})\,\Delta t + \sigma \mathcal{Z}_n \sqrt{\Delta t}}$$

Simulamos la evolución del Ibex I con un camino aleatorio (geométrico):

$$\boxed{I_n = I_{n-1}\left((1 + R_{n-1}\Delta t) + \eta \mathcal{W}_n \sqrt{\Delta t}\right)}$$

Los $\mathcal{Z}$ son variables normales independientes. También lo son las $\mathcal{W}$. Cada par $\mathcal{Z}_n$, $\mathcal{W}_n$ tiene correlación ρ.

En la empresa ponemos tres niveles salariales A, B, C, además de un nivel adicional J que recoge la transición a la jubilación. Modelizamos la evolución del conjunto de empleados como una cadena de Markov con matriz de transición

	A	B	C	J
A	20%	20%	50%	10%
B	40%	30%	15%	15%
C	20%	30%	20%	30%
J	0%	0%	0%	100%

Además tenemos una tasa de incorporación τ de nuevos empleados al plan.

Políticas de gestión. En el ejemplo objeto de análisis podemos restringir la gestión a la decisión (dinámica) de qué proporción se invierte en renta fija y en renta variable. Este es el espacio de acciones: ¿cómo invertir?

Criterio de buena gestión. Como objetivo de gestión nos podría interesar maximizar el valor medio del valor del fondo en una determinar fecha futura. O minimizar la probabilidad de que el valor del fondo quede por debajo de un nivel. La selección de objetivo es política.

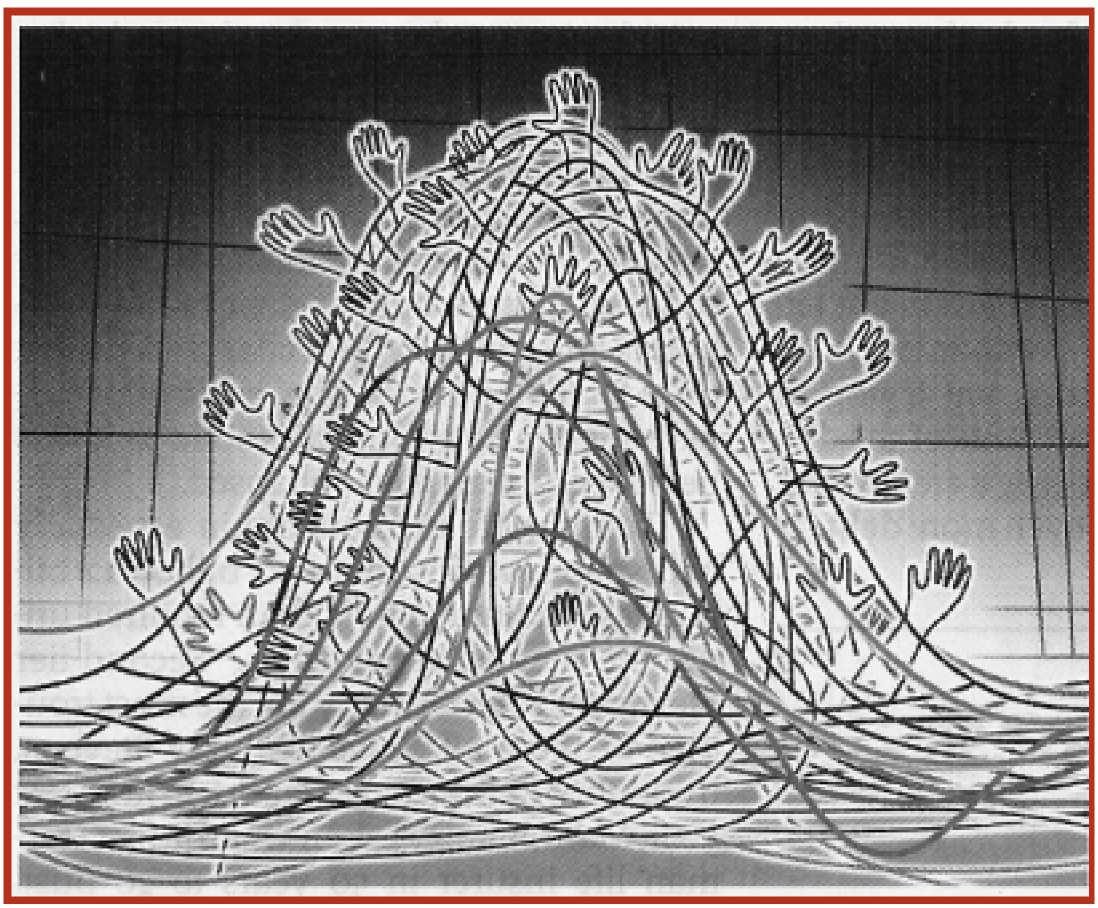
Con todo esto podemos montar un buen simulador Montecarlo, con la varianza bien controlada, que nos simularía la evolución del fondo para cada política de inversión.

El resultado de la simulación para cada política de gestión es un histograma de valores del fondo. El criterio de buena gestión es un estadístico de ese histograma, y por tanto de esa política de gestión. Esto permite comparar política de gestión. Finalmente, se ha de optimizar en el espacio de las políticas de gestión.

Algunas sugerencias de lectura.

He aquí unas cuantas referencias (técnicas) en matemática del seguro.

- *Actuarial mathematics.* Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbitt. The Society of Actuaries, 1986.
- *Life Insurance Mathematics.* Hans U. Gerber. Springer-Verlag, 1977.
- *Non-life Insurance mathematics.* E. Straub. Springer-Verlag, 1997.
- *Teoría del Riesgo y su aplicación a la empresa aseguradora.* Luis Latorre. Fundación MAPFRE. 1992.
- *Practical Risk Theory for Actuaries.* C. D. Daykin, T. Pentikäinen and M. Pesonen. Chapman & Hall. 1994.
- *Stochastic processes for Finance and Insurance.* H. Rolski, H. Schmdli, V. Schmidt, J. Teugels. Wiley, 1999. (Pura tercera fase.)



Atrapados por la Normal. *The Economist.*