MATEMÁTICAS ACTUARIALES
Y OPERACIONES DE SEGUROS

F. SANDOYA

Sandoya, Fernando; Matemáticas Actuariales y Operaciones de seguros; segunda edición;
ISBN: 978-9978-310-46-5; ESPOL; 2007

A mis padres,
a mi esposa,
y a mis hijos

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Agradecimientos

Durante la preparación de este texto se ha recibido la valiosa ayuda de varias personas, sin lo cual no se hubiera podido sacar adelante esta publicación, a todas las cuales expreso un agradecimiento sincero.

Al M.Sc. Washington Armas, Director del Instituto de Ciencias Matemáticas (ICM), por su motivación y apoyo moral para la edición de libros de Matemáticas y sus aplicaciones.

A la Ing. Eva Mera, profesora del ICM, quien revisó todo el texto e hizo muchas sugerencias pertinentes; como resultado de esto el libro resultó mucho mejor.

A la Srta. Linda Cabrera por su gran ayuda en la edición del manuscrito del libro.

Prólogo

Este libro es fruto de una doble experiencia del autor. La primera, y probablemente la principal, la docente, fruto de algunos años de ejercer la cátedra de Matemáticas Actuariales en la ESPOL, y gracias a la cual se incluyen numerosos ejercicios resueltos y propuestos que refuerzan el análisis teórico de los modelos estudiados. La segunda, no menos importante, proveniente de la investigación, sobretodo a través de la dirección de tesis de grado de la Carrera de Ingeniería en Estadística Informática cuyos temas tenían mucho que ver con la ciencia actuarial y también de otro tipo de investigaciones realizadas y que han sido expuestas en las Jornadas de Estadísticas organizadas por la ESPOL y en los Congresos Nacionales de Matemáticas desarrollados por la Escuela Politécnica Nacional en Quito.

Hace algunos años, con el inicio de la computación, los actuarios ponían bastante énfasis en el manejo y el control de los sistemas de seguros; hoy en día, con el creciente desarrollo de la informática que nos ha proporcionado alto rendimiento, capacidad de almacenamiento y manejo de datos y velocidad en los cálculos, los esfuerzos se deben encaminar en otros sentidos, por ejemplo en poner mayor atención en dar soluciones innovadoras y creativas a las demandas de la sociedad, que busca mayor seguridad financiera. Esta tarea puede cumplirse eficientemente solo si podemos modelizar lo más fielmente posible las situaciones que pueden presentarse, y es así que en este libro se hace un énfasis constante en la construcción de modelos actuariales y en análisis del riesgo implicado en ellos.

El texto no sólo está dirigido al estudiante de Ingeniería o Auditoría, sino que también resultará útil a los profesionales actuarios que deseen refrescar sus conocimientos en éstas áreas. Aborda los conocimientos básicos de la teoría de la utilidad y de la sobrevivencia, pero sobretodo profundiza en el análisis del cálculo del valor actuarial y las primas en seguros de vida y rentas, así como también en la determinación de la Reserva Matemática de las prestaciones, algo que se debe destacar es que a lo largo de todo el texto se hace énfasis en la modelización de diferentes situaciones que involucran el valor actuarial y el riesgo.

Guayaquil, Ecuador Julio del 2005
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS
ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

Capítulo 1

Los Seguros y la teoría de la utilidad

1.1. Introducción

Antes que nada, conviene hacer una revisión sobre como aparecieron los seguros en la sociedad, y como fue abordado este tema en sus inicios, así como su evolución en el tiempo.

Históricamente, los seguros se perfilan como tales a partir de la Baja Edad Media como consecuencia del creciente tráfico marino, que en esa época se constituyó en el principal medio de transporte de productos y personas entre lugares distantes. Como es fácil suponer, la tecnología usada en la fabricación de barcos en esa época era todavía muy incipiente, así como también eran prácticamente inexistentes los sistemas de comunicación, los sistemas de seguridad y los métodos de predicción del tiempo, por lo cual con cierta regularidad estas embarcaciones sufrían naufragios, robos, motines y otros tipos de siniestros, que hacían que se pierda parcial o totalmente la embarcación con toda la carga, incluyendo la pérdida de vidas humanas, y por supuesto de bienes. Para paliar esta situación entonces aparecieron una especie de seguros para cubrir las posibles pérdidas, y es justamente en las ciudades marítimas italianas, en las cuales el tráfico marino era intenso, donde nacen estos seguros, que caen en el campo de lo que hoy denominamos Seguros no Vida, luego estos se extendieron rápidamente por toda Europa, sobretodo por los países mediterráneos, y se empezó asimismo a legislar sobre el tema, en particular, cabe mencionar una de las leyes más antiguas del mundo que a su vez constituye la normativa de seguros más antigua de España: que son las *Ordenanzas de seguros marítimos* de Barcelona de 1432.

Los Seguros de vida aparecieron un poco más tarde, con la incorporación de las técnicas estadísticas desarrolladas en la época, y es así que algunos estudiosos consideran que la ciencia actuarial como tal tiene su inicio en el año de 1693, con el artículo publicado por Edmund Ha-lley titulado: *"Un estimado del grado de mortalidad de la humanidad, obtenido de varias tablas de edades y funerales en la ciudad de Breslau"*. El artículo provocó un gran interés en la comunidad científica de ese entonces, sin embargo la gran cantidad de datos que era necesario procesar hacía que los cálculos sean muy tediosos y complicados y por tanto el real desarrollo de la ciencia actuarial se dió en la época moderna con el aparecimiento de la informática.

Actualmente se puede decir que las operaciones de seguros se han establecido en la sociedad moderna con el fin de proteger a las personas y a las empresas de contratiempos financieros importantes originados por sucesos que pueden acaecer aleatoriamente y que no forman parte de planes futuros de las mismas. En este sentido los seguros cumplen un papel dinamizador en la economía, porque inducen a las personas o a las empresas a participar en actividades en las que normalmente no participarían si no tuvieran la cobertura del seguro.

Cabe anotar que la cobertura de las operaciones de seguros se limita a reducir las consecuencias de los sucesos aleatorios que se pueden medir en términos monetarios, y que cualquier otro tipo de impacto no financiero, como por ejemplo de carácter sentimental, no puede ser retribuido por un seguro.

En definitiva, podríamos definir una *operación de seguros* como un medio para reducir el impacto financiero adverso ocasionado por sucesos aleatorios que impiden que se realicen normalmente las expectativas o planes de las personas o las empresas.

1.2. La esperanza matemática de la utilidad

Obviamente si los seguros dan cobertura sobre los riesgos, su evaluación debe hacerse en función de la *utilidad* que las personas piensan tener en sus acciones.

Así, en todas nuestras actividades, si pudiéramos prever las consecuencias de las decisiones que tomamos, podríamos decidir en base a nuestras preferencias respecto a los resultados que se tengan, pero como en la práctica no podemos disponer de estas previsiones lo mejor que puede hacerse es tomar las decisiones de acuerdo a la incertidumbre asociada a nuestras expectativas. Para esto se ha elaborado la denominada *teoría de la utilidad*, que se basa en el uso del valor esperado.

Para fundamentar el uso de la *esperanza matemática de la utilidad* como criterio de elección en el futuro aleatorio y determinar una función de utilidad que permita ordenar las eventualidades, es preciso establecer los siguientes axiomas:

i) De preferencia

ii) De transitividad

iii) De independencia estricta

iv) De unicidad

v) De ordenación

vi) De no saciedad

El objetivo de este texto no es el de profundizar en cada uno de estos axiomas, que pertenecen a la teoría microeconómica y específicamente a la teoría del consumidor, pero de manera intuitiva se puede decir que los tres primeros axiomas mencionados permiten identificar los distintos tipos de preferencias de los consumidores, por ejemplo se necesita el axioma de transitividad porque si las preferencias no fueran transitivas se podría encontrar un conjunto de alternativas tal que ninguna de ellas fuese mejor y por lo tanto no se podría decidir por una de ellas. Los tres últimos axiomas en cambio indican que el orden de las preferencias puede ser representado por una función de utilidad.

En definitiva, el cumplimiento de estos axiomas se reduce a la satisfacción de dos hipótesis:

1. las decisiones se toman de manera completamente racional y
2. estas decisiones se las elige de un gran número de posibilidades.

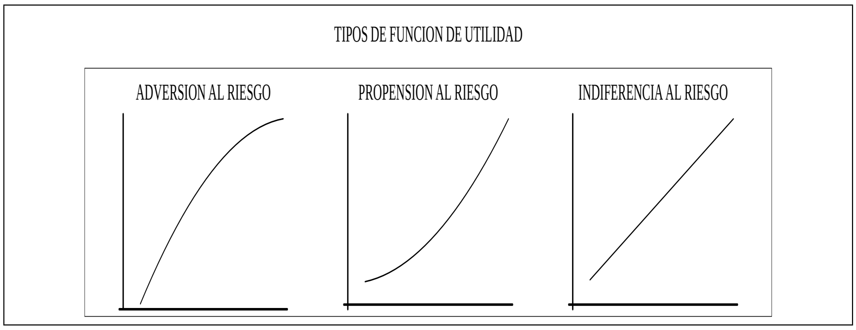
De esta manera, los decisores tratarán de *maximizar la esperanza matemática de la utilidad de sus recursos.*

Representaremos con $U(r)$ a la función de utilidad de un ente cualquiera (persona o empresa) en función de sus recursos r; en la siguiente sección se analizan las distintas posibilidades para esta función, dado que se satisfacen los axiomas anteriores.

1.3. Adversión al riesgo

Por un lado el axioma de no-saciedad implica que todas las funciones de utilidad deben ser monótonas crecientes, es decir, $U'(r) > 0$, o lo que es lo mismo, la utilidad marginal debe ser positiva. Mientras que respecto a la concavidad de la función se pueden presentar 3 casos, que se muestran en la Figura 1.1:

Figura 1.1: Formas que puede adoptar la función de utilidad



Caso 1: La utilidad es cóncava (i.e. $U''(r) < 0$): La utilidad crece menos que proporcionalmente.

Caso 2: La utilidad es convexa (i.e. $U''(r) > 0$): La utilidad crece más que proporcionalmente.

Caso 3: La utilidad es lineal (i.e. $U''(r) = 0$): La utilidad crece de manera proporcional.

Cuando la utilidad del valor esperado de los recursos es mayor que la utilidad esperada de los mismos, se dice que el decisor es *adverso al riesgo*, si es menor se dice que es *propenso al riesgo* y si es igual se dice que es *indiferente al riesgo*.

i.e.: $U(E(r)) > E(U(r))$; adverso al riesgo
$U(E(r)) < E(U(r))$; propenso al riesgo
$U(E(r)) = E(U(r))$; indiferente al riesgo

Así, se puede observar que en el caso 1, si la utilidad es cóncava, el ente es adverso al riesgo; en el caso 2, si la utilidad es convexa el ente es propenso al riesgo; y en el caso 3, es indiferente al riesgo, tal como se observó en la Figura 1.1.

En general, se supone que todos los entes que participan en operaciones financieras son adversos al riesgo.

1.4. Indemnización, prima pura, prima bruta

En esta parte se introducen algunos conceptos asociados a los seguros, y que son fundamentales para la comprensión del resto del libro.

Considerada una persona que posee un bien que corre el riesgo de ser destruido en el futuro, definimos como la variable aleatoria ξ , cuya distribución se supone conocida, al monto de la posible pérdida total o parcial del bien. Por otro lado supongamos que un *ente asegurador* se establece con el fin de colaborar en la reducción de las consecuencias financieras de dicha pérdida. En tal caso el asegurador emite *pólizas*, que son contratos por medio de los cuales el asegurador se compromete a pagar al propietario del bien asegurado una suma igual o menor a la pérdida financiera si es que el bien fuera dañado o destruido durante el periodo de *vigencia* de la póliza. A dicho pago se le denomina *indemnización* y a la contrapartida del compromiso, es decir al pago por parte del asegurado, se le denomina *prima*.

En general, el valor de la prima debe ser calculado en base a un principio de equilibrio *financiero-actuarial*, y la determinación de este valor es uno de los principales objetivos de la teoría actuarial. El teorema 1.1 indica como debe ser calculada la prima.

Teorema 1.1 *Si para una operación de seguros individual, suponemos que la función de utilidad del asegurador es lineal, el asegurador adopta el principio del valor esperado, i.e. el asegurador establece como precio para la cobertura del seguro el valor esperado de la pérdida $E(\xi)$, valor que se denomina* ***prima neta*** *o* ***prima pura*** *y que se representa con P.*

$$P = E(\xi)$$

DEMOSTRACIÓN

Si el propietario del bien tiene una función de utilidad $U(r)$, y se enfrenta con posibles pérdidas aleatorias ξ, se mostrará indiferente entre pagar una cantidad P (prima) al asegurador y que este se comprometa a cubrir las pérdidas o asumir el mismo el riesgo de la posible pérdida, lo cual se expresa como:

$$U(r-p) = E\big(U(r-\xi)\big)$$

En el caso particular de que la función de utilidad del propietario del bien fuera lineal:

$$\begin{aligned} U(r) &= ar+b \\ U(r-p) &= E\big(U(r-\xi)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(r-p)+b &= E(ar-a\xi+b) \\ ar-ap+b &= ar-aE(\xi)+b \end{aligned}$$

Y así: $P = E(\xi)$
Es decir en este caso el pago de la prima mostraría al propietario indiferente entre obtener el seguro y no asegurarse.
Con lo que queda demostrado el teorema 1.1. ■

Si el asegurador, para cubrir los gastos de operación, cobro de administración de la cartera, cierta seguridad frente a pérdidas, impuestos, beneficios, etc. incrementa la prima pura con los recargos correspondientes, se obtiene la llamada *prima bruta* representada con π:

$$\pi = P(1+\rho)+c; \rho > 0, c > 0$$

Donde Pρ representa la cantidad asociada a los gastos variables que dependen de las pérdidas esperadas P y la constante c se refiere a los gastos esperados que no varían con las pérdidas.

Cuando analizamos una función de utilidad lineal para el decisor, habría una indiferencia por parte del asegurado en adquirir o no la póliza, y si el asegurador no dispusiera de una subvención adicional a largo plazo correría el riesgo de arruinarse, por tanto el asegurador debe cobrar una prima superior a las pérdidas esperadas (i.e. el propietario no puede caracterizarse por tener una función de utilidad lineal o convexa). Entonces procede suponer que en el mercado los decisores tienen función de utilidad $U(r)$ de tipo cóncavo, i.e. $U''(r) < 0$, lo que implica que $E(U(\xi)) < U(E(\xi))$ y por tanto el asegurado pagará al asegurador una cantidad superior a la pérdida esperada, como se demuestra a continua-ción.

En efecto, si $U_A(r)$ es la función de utilidad del asegurador y r_A los recursos monetarios actuales del asegurador entonces la prima aceptable mínima π para cubrir la pérdida aleatoria ξ desde el punto de vista del asegurador puede obtenerse de la siguiente manera:

$$U_A(r) = E\big(U_A(r_A+\pi-\xi)\big)$$

Donde:

$$
\begin{array}{lcl}
U_A(r) & \rightarrow & \text{utilidad actual con los recursos monetarios} \\
 & & \text{que dispone} \\
E\big(U_A(r_A+\pi-\xi)\big) & \rightarrow & \text{utilidad esperada del asegurador al asumir} \\
 & & \text{el riesgo de la pérdida y mediante el cobro} \\
 & & \text{de la prima } \pi
\end{array}
$$

Así:

$$U_A(r_A) = E\big(U_A(r_A+\pi-\xi)\big) \leq U_A(r_A+\pi-\mu) \quad \Rightarrow \quad \pi \geq \mu$$

1.5. Problemas resueltos

Problema 1.1 *Supongamos que la función de utilidad del propietario es $U(r)=\sqrt{r}$. El decisor dispone de unos recursos $r=20$ u.m. y se enfrenta con una posible pérdida aleatoria de estos recursos ξ con distribución uniforme en $[0,20]$. Se pide determinar la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar el decisor por un seguro que le cubra la posible pérdida.*

Solución

$$
\begin{aligned}
U(r) &= \sqrt{r} \\
U(r-P) &= E\big(U(r-\xi)\big) \\
\sqrt{r-P} &= E\big(\sqrt{r-\xi}\;\big) \\
&= \int_0^{20} \frac{\sqrt{r-\xi}}{20}\, d\xi \\
&= -\frac{1}{30}(r-\xi)^{3/2}\Big|_0^{20} \\
\sqrt{r-P} &= \frac{r^{3/2}}{30}
\end{aligned}
$$

Como $r=20$, resolviendo la ecuación anterior

$$\Rightarrow P = \frac{100}{9}$$

Problema 1.2 *Un decisor financiero tiene una función de utilidad: $U(r) = -e^{-r}$, siendo ξ una variable aleatoria Bernoulli. El decisor está tratando de pagar la cantidad P_1 para asegurarse contra una pérdida de 1 u.m. donde P es la probabilidad de pérdida. Cuál es la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar el decisor por el seguro?*

Solución

$$\begin{aligned}
U(r-P) &= E\big(U(r-\xi)\big)\\
-e^{-r+P_1} &= E(-e^{-r+\xi})\\
&= -e^{-r+0}(1-P) - e^{-r+1}P\\
&= -e^{-r}(1-P+P\ e)\\
e^{P_1} &= 1-P+P\ e\\
P_1 &= \ln(1-P+P\ e)
\end{aligned}$$

Problema 1.3 *Un decisor financiero tiene una función de utilidad: $U(r) = -e^{-r}$, siendo ξ una variable aleatoria Bernoulli. El decisor está tratando de pagar la cantidad P_2 para asegurarse contra una pérdida de 1 u.m. donde $(1-P)$ es la probabilidad de pérdida. Cuál es la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar el decisor por el seguro?*

Solución

$$\begin{aligned}
U(r-P) &= E\big(U(r-\xi)\big)\\
-e^{-r+P_2} &= E(-e^{-r+\xi})\\
&= -e^{-r+0}P - e^{-r+1}(1-P)\\
&= -e^{-r}\big(P+e(1-P)\big)\\
e^{P_2} &= P+e-e\ P\\
P_2 &= \ln(P+e-e\ P)
\end{aligned}$$

Problema 1.4 *Un decisor financiero tiene una función de utilidad: $U(r) = -e^{-r}$, siendo ξ una variable aleatoria Bernoulli. El decisor está tratando de pagar la cantidad P_3 para asegurarse contra una pérdida de 1 u.m. donde 0,5 es la probabilidad de pérdida. Cuál es la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar el decisor por el seguro?*

Solución

$$\begin{aligned}
U(r-P) &= E\big(U(r-\xi)\big)\\
-e^{-r+P_3} &= E(-e^{-r+\xi})\\
&= -e^{-r}(0{,}5)\ -e^{-r+1}(0{,}5)\\
e^{P_3} &= 0{,}5(1+e)\\
P_3 &= \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)
\end{aligned}$$

Problema 1.5 *Una persona tiene función de utilidad $U(r)$, cuya regla de correspondencia se muestra abajo, y dispone de una cantidad de recursos de 6 u.m. Ade-más se conoce que está expuesto a perder parte o todos sus recursos disponibles, siendo ξ la variable aleatoria que representa la pérdida y cuya distribución $F(x)$ es conocida, y mostrada a continuación. Cuánto está dispuesto a pagar la persona por una póliza que le cubra la posible pérdida aleatoria?*

$$U(r) = \begin{cases} r & ;0 \leq r \leq 2 \\ 1+\dfrac{r}{2} & ;r \geq 2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ;x < 0 \\ 0{,}5 & ;0 \leq x < 2 \\ 0{,}6 & ;x = 2 \\ 0{,}6+(x-2)0{,}1 & ;2 < x \leq 6 \\ 1 & ;x > 6 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{aligned}
U(6-P) &= E(U(6-\xi))\\
U(6-P) &= \begin{cases} 6-P & ;0 \leq 6-P \leq 2 \\ 1+\dfrac{6-P}{2} & ;6-P \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$P(\xi = 0) = 0{,}5$, $P(\xi = 2) = 0{,}1$, $\xi > 2 \ \rightarrow\ \xi$ es variable aleatoria continua

$$
\begin{aligned}
E(U(6-\xi)) &= E\begin{cases} 6-\xi & ;4 \leq \xi \leq 6 \\ 4-\dfrac{\xi}{2} & ;0 \leq \xi \leq 4 \end{cases} \\
&= \left(4-\frac{0}{2}\right) 0,5 + \left(4-\frac{2}{2}\right) 0,1 + \int_2^4 \left(4-\frac{\xi}{2}\right) 0,1 \; d\xi + \\
&\quad + \int_4^6 (6-\xi) \; 0,1 \; d\xi \\
&= 2 + 0{,}3 + 0{,}4 \; \xi - \frac{\xi^2}{4} \; 0{,}1 \Big|_2^4 + 0{,}6 \; \xi - \frac{\xi^2}{2} \; 0{,}1 \Big|_4^6 \\
&= 2 + 0{,}3 + 0{,}8 - 0{,}3 + 1{,}2 - 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6 - P = 3 \quad &\Rightarrow \quad P = 3 \wedge (4 \leq P \leq 6)(\text{lo cual no es posible}) \\
4 - \frac{P}{2} = 3 \quad &\Rightarrow \quad P = 2 \wedge (0 \leq P \leq 4)
\end{aligned}
$$

Luego:

$$P = 2$$

Capítulo 2

Distribuciones de supervivencia y tablas de mortalidad

En este capítulo se presenta una introducción a los fundamentos de la estadística y del análisis de sobrevivencia, haciendo énfasis en cierto tipo de función que representa la sobrevivencia de un individuo y que es de gran importancia en la teoría de seguros de vida y de rentas de sobrevivencia.

El análisis de sobrevivencia consiste en una colección de procedimientos estadísticos para el estudio de datos relacionados con el tipo de ocurrencia de un determinado evento de interés (que generalmente será el fallecimiento del individuo), a partir de un instante inicial preestablecido.

2.1. Variables aleatorias y distribuciones

A continuación se pueden observar las definiciones y propiedades básicas propias de la estadística, con el fin de comprender los conceptos estadísticos asociados al análisis de supervivencia.

Experimentos aleatorios: En términos simples un experimento aleatorio es un proceso cuyo resultado es incierto, al resultado del experimento lo representamos con ω.

Espacio muestral: Es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento aleatorio, se representa con Ω.

Evento: Denominaremos evento a cualquier subconjunto del espacio muestral, diremos que el evento A ocurre si y solo si el resultado del experimento $\omega \in A$.

Probabilidad: Dado un experimento aleatorio con espacio muestral Ω, se dice que la función $P : \gamma(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$[1] es una función de probabilidad si satisfacen los siguientes axiomas (establecidos por Kolmogorov en 1933):

i) $\forall A \subseteq \Omega : P(A) \geq 0$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) Si A_i es una colección numerable de eventos disjuntos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Variable aleatoria: Se denomina variable aleatoria Y, a cualquier función de valores reales cuyo dominio es el espacio muestral de un experimento aleatorio. Es decir, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Función de distribución de la variable aleatoria: Se denomina función de distribución de la variable aleatoria Y a la función definida por:

$$F(y) = P(Y \leq y)$$

Variables aleatorias discretas: Se dice que una variable aleatoria Y es discreta si su rango[2] es un conjunto discreto.

Variables aleatorias contínuas: Se dice que una variable aleatoria Y es contínua si su función de distribución es una función contínua.

Funciones de densidad de probabilidad: Para el caso contínuo y discreto se definen de la siguiente forma:

- Para el caso discreto se define la función de densidad de probabilidad $p(y)$ como:

$$p(y) = P(Y = y)$$

- Para el caso contínuo se define la función de densidad de probabilidad $f(y)$ como:

$$f(y) = \frac{dF}{dy}(y)$$

[1] $\gamma(\Omega)$ representa el conjuto potencia de Ω, es decir el conjunto de todos los subconjuntos de Ω

[2] El rango de una función es el conjunto de sus imágenes, en otras palabras es el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria

Propiedades de las distribuciones de probabilidad: Las funciones de densidad de probabilidad en los casos discreto y contínuo, satisfacen éstas propiedades:

CASO DISCRETO	CASO CONTÍNUO
$\forall y, p(y) \geq 0$	$\forall y, f(y) \geq 0$
$\sum_y p(y) = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\ dy = 1$

En el caso contínuo además se satisfacen las siguientes propiedades de la función de distribución $F(y)$:

- $\lim_{y \to -\infty} F(y) = 0$
  $\lim_{y \to +\infty} F(y) = 1$
- F es una función continua, monótona creciente.

Valor esperado de una variable aleatoria: Para una variable aleatoria Y cualquiera, se define su valor esperado, o esperanza matemática, como:

$$\begin{aligned} \text{Caso discreto:} \quad E(Y) &= \sum_y y\ p(y) \\ \text{Caso contínuo:} \quad E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\ f(y)\ dy \end{aligned}$$

Valor esperado de una función de una variable aleatoria: Para una variable aleatoria Y, se define el valor esperado de una función $g(Y)$ cualquiera, como:

$$\begin{aligned} \text{Caso discreto:} \quad E(g(Y)) &= \sum_y g(y)\ p(y) \\ \text{Caso contínuo:} \quad E(g(Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\ f(y)\ dy \end{aligned}$$

Varianza de una variable aleatoria: Para una variable aleatoria Y cualquiera, se define la varianza de Y, representada con $Var(Y)$ o $\delta^2 y$

$$Var(Y) = E(x - \mu)^2$$

Donde $\mu = E()$, es decir es el valor esperado de la diferencia cuadrática entre la variable y su esperanza.

Teorema 2.1

$$Var(Y) = E(x^2) - E^2(x)$$

DEMOSTRACIÓN

Para el caso contínuo:

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= E(x-\mu)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx - 2\ \mu\ x\ f(x) + \mu^2\ f(x)\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx - 2\ \mu\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx + \\
&\quad \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \\
&= E(x^2) - 2\ \mu\ E(x) + \mu^2 \\
&= E(x^2) - 2\ E^2(x) + E^2(x) \\
&= E(x^2) - E^2(x)
\end{aligned}$$

2.2. El Modelo Biométrico

La biometría es el conjunto de métodos de la Estadística Actuarial que se ocupa, fundamentalmente, del estudio de la supervivencia de los elementos de cualquier población sujeta a un proceso de envejecimiento, por ejemplo de personas, animales, o incluso de otro tipo de entes, como objetos o empresas. Esta supervivencia generalmente es caracterizada por un conjunto de características agrupadas en las denominadas tablas de mortalidad, la modelización de estas características se dice que representan el modelo biométrico, cuya variable independiente principal es el denominado tiempo biométrico de los individuos, que no es más que la edad de los mismos. Este modelo biométrico es un modelo estocástico, en el sentido que incluye en su estructura por lo menos a una variable aleatoria, esta es la variable ξ, que llamaremos edad de fallecimiento, y que representa el tiempo biológico transcurrido desde el instante del nacimiento del individuo hasta su fallecimiento.

Obviamente la edad de fallecimiento ξ intrínsicamente es una variable aleatoria contínua. Sin embargo, la información de la que se dispone referente a la edad de fallecimiento de los individuos a través de registros censales o muestrales de poblaciones concretas, suministran únicamente los años completos que ha vivido el individuo, por lo que en la práctica se debe describir a la variable ξ como una variable aleatoria discreta. En los modelos que se deducen en este libro se toman en cuenta éstas dos situaciones posibles, dependiendo de las características del problema a modelizar.

2.3. Función de supervivencia

Sea x la edad, en años enteros, de un ente (individuo, empresa, máquina, etc.), es decir, $x = 0, 1, 2, \ldots$ y consideremos un ente recién nacido (recién creada, recién comprada, etc.) al cual le asociamos la variable aleatoria ξ que representa la edad de fallecimiento (quiebra, daño, etc.) del ente considerado. Si $F(x)$ es la distribución de probabi-lidad acumulada (i.e. $F(x) = P(\xi \leq x, \ x \geq 0)$), definimos la *función de supervivencia* de x por:

$$S(x) = 1 - F(x),$$

es decir $S(x) = P(\xi > x)$ es la probabilidad de que el ente llegue con vida a la edad x.

2.3.1. Propiedades

- La distribución de ξ queda completamente determinada por $F(x)$ o $S(x)$.

- $S(x)$ es una función monótona decreciente.

- $S(0) = 1$

- $\lim\limits_{x \to \infty} S(x) = 0$

- La probabilidad que un recién nacido fallezca entre x y y, sobreviviendo a la edad x es:

$$\begin{aligned} P(x < \xi \leq y \,|\, \xi > x) &= \frac{P(x < \xi \leq y)}{P(\xi > x)} \\ &= \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x) - S(y)}{S(x)} \end{aligned}$$

2.3.2. Tiempo de vida futura y probabilidades de fallecimiento y sobrevivencia

Representamos con (x) al ente (persona, empresa, etc.) de edad x y por $T(x)$ al tiempo futuro de supervivencia de (x), i.e. $T(x) = \xi - x$. Se definen:

- La probabilidad de que (x) fallezca dentro de t años:

$$_tq_x = P\big(T(x) \leq t\big)$$

- La probabilidad que (x) sobreviva por lo menos t años más:

$$_tp_x = P\big(T(x) > t\big)$$

De manera particular las probabilidades de fallecimiento y supervivencia a un año se representan con q_x y p_x en lugar de $_1q_x$ y $_1p_x$, respectivamente. Es decir:

- $q_x = P\big(T(x) \leq 1\big) =$ Probabilidad que fallezca dentro de un año
- $p_x = P\big(T(x) > 1\big) =$ Probabilidad que sobreviva al año siguiente

En cambio, la probabilidad que (x) sobreviva t años más y fallezca en los n años siguientes se representa con $_{t/n}q_x$.

Aunque estas probabilidades temporales de fallecimiento y sobrevivencia, $_tq_x$ y $_tp_x$ están definidas para cualquier valor real de t, en la práctica solo son calculadas para valores enteros de t a partir de las tablas de mortalidad, aunque en 2.6 se analiza la situación en la cual t no es entero.

En el Teorema 2.2 se analizan algunas propiedades que tienen estas probabilidades.

Teorema 2.2 *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

---

i) ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$

ii) *En el caso de recién nacidos*

$$\begin{aligned} T(0) &= \xi \\ &= S(x), \quad \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

iii) ${}_{t/n}q_x = {}_tp_x \ {}_nq_{x+t}$

$$\begin{aligned} {}_{t/n}q_x &= P\big(t < T(x) \leq t+n\big) \\ &= {}_{t/n}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+n}p_x \\ &= {}_tp_x \ {}_nq_{x+t} \end{aligned}$$

iv) ${}_tp_x = \dfrac{S(x+t)}{S(x)}$

DEMOSTRACIÓN

Demostremos la tercera parte del teorema 2.2

$$\begin{aligned} {}_{t/n}q_x &= P\big(t < T(x) \leq t+n\big) \\ &= P\big(T(x) \leq t+n\big) - P\big(T(x) \leq t\big) \\ &= {}_{t+n}q_x - {}_tq_x \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} {}_{t/n}q_x &= \frac{S(x) - S(x+t+n)}{S(x)} - \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \\ &= \frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x)} \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+t) - S(x+t+n)}{S(x+t)} \\ &= {}_tp_x \ {}_nq_{x+t} \ \blacksquare \end{aligned}$$

2.3.3. Tiempo de vida futura

En el caso discreto, se representa con $K(x)$ al tiempo de vida futura, y se lo denomina *tiempo de vida abreviado*, con distribución:

$$\begin{aligned} P\big(K(x)=k\big) &= P\big(k \leq T(x) < k+1\big) \\ &= {}_t p_x \; - \; {}_{k+1}p_x \\ &= {}_{k+1}q_x \; - \; {}_k q_x \end{aligned}$$

También:

$$P\big(K(x)=k\big) \quad = \quad {}_k p_x \, q_{x+k} \qquad ; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

En definitiva $K(x)$ representa el número de años completos de sobrevivencia.

2.4. Modelos de sobrevivencia/quiebra y tablas de mortalidad

Las tablas de mortalidad generalmente contienen valores tabulados de l_x, d_x, q_x, y otros valores que corresponden a estimaciones de parámetros de supervivencia y mortalidad de una población obtenidas a partir de datos demográficos de nacimientos y defunciones en la misma.

Se denota con l_0 al número de recién nacidos. Cada recién nacido tiene asociada una distribución $S(x)$. Si $\lambda(x)$ es el número de sobrevivientes a la edad x, se define $l_x = E(\lambda(x))$; es decir, l_x es el número esperado de sobrevivientes a la edad x.

De esta manera tenemos que $\lambda(x)$ es una variable aleatoria con distribución binomial cuyos parámetros son l_0 (número de intentos) y $S(x)$ pro-babilidad de éxito.

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \beta\left(l_0, S(x)\right) \\ \Rightarrow l_x &= l_0 \, S(x) \end{aligned}$$

De forma análoga si ${}_n\delta_x$ es el número de fallecimientos entre las edades x y $x+n$ de entre los l_0 iniciales y ${}_n d_x = E({}_n\delta_x)$; es decir, el número esperado de fallecimientos entre estas edades.

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad {}_n d_x &= l_0 \left(S(x) - S(x+n)\right) \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned}$$

2.4.1. Tasa instantánea de mortalidad

Como q_x es el porcentaje anual de fallecimientos, y es evidente que este valor varía para cada edad x, es interesante disponer de una forma de medir su variación instantánea. Para ello consideramos la probabilidad que una persona fallezca entre x y $x + \Delta x$, dado que sobrevive a la edad x:

$$P(x < \xi \leq x + \Delta x \quad | \quad \xi > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)}$$

Y si Δx es suficientemente pequeño:

$$P(x < \xi \leq x + \Delta x \quad | \quad \xi > x) \simeq \frac{F'(x)\Delta x}{1 - F(x)} = \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

Es decir, la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en el instante Δx posterior es proporcional a la duración de ese instante con el coeficiente de proporcionalidad siguiente:

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

A esta expresión se le denomina la fuerza de la mortalidad y se la representa con μ_x, y es en definitiva una medida de la intensidad de la mortalidad a la edad x, para los individuos que han alcanzado esa edad.

Entonces:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{f(x)}{1 - F(x)} \\ &= -\frac{S'(x)}{S(x)} \\ &= -\frac{d}{dx}\big(\ln S(x)\big) \\ &= -\frac{d}{dx}\big(\ln (l_x)\big) \end{aligned}$$

Teorema 2.3 *La fuerza de mortalidad satisface las siguientes propiedades:*

i) $\mu_x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\mu_x = -\dfrac{S'(x)}{S(x)} = -\dfrac{l'_x}{l_x}$

---

iii) ${}_{n}p_{x} = e^{-\int_{x}^{x+n} \mu_x \, dx} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} \, dt}$

iv) ${}_{n}q_{x} = \displaystyle\int_0^n {}_{t}p_{x} \, \mu_{x+t} \, dt$

DEMOSTRACIÓN

Demostremos la parte *iii)* del teorema 2.3:

$$
\begin{aligned}
-d\left(\ln S(x)\right) &= \mu_x \; dx \\
-\int_x^{x+n} d\left(\ln\; S(x)\right) &= \int_x^{x+n} \mu_x \; dx \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{S(x+n)}{S(x)}\right) &= -\int_x^{x+n} \mu_x \; dx \\
\Rightarrow \ln\; {}_{n}p_{x} &= -\int_x^{x+n} \mu_x \; dx \\
\therefore\; {}_{n}p_{x} &= e^{-\int_x^{x+n} \mu_x \; dx} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

DEMOSTRACIÓN

Demostremos la parte *iv)* del teorema 2.3:

$$
\begin{aligned}
-\frac{l'_x}{l_x} &= \mu_x \\
\Rightarrow \int_x^{x+n} d\; l_x &= -\int_x^{x+n} l_x \; \mu_x \; dx \\
l_{x+n} - l_x &= -\int_x^{x+n} l_y \; \mu_y \; dy \\
l_x - l_{x+n} &= +\int_0^n l_{x+t} \; \mu_{x+t} \; dt
\end{aligned}
$$

diviendo para l_x:

$$
\Rightarrow_n q_x \;=\; \int_0^n {}_{t}p_{x} \; \mu_{x+t} \; dt \quad \blacksquare
$$

Es decir ${}_{t}p_{x} \, \mu_{x+t}$ es la función de densidad de la variable aleatoria tiempo de vida futuro para un individuo de edad x.

Cuadro 2.1: Relaciones entre las funciones biométricas

	$f(x)$	$F(x)$	$S(x)$	μ_x	l_x
$f(x)$		$F'(x)$	$-S'(x)$	$\mu_x e^{-\int_0^x \mu_t \, dt}$	$-\dfrac{l'_x}{l_0}$
$F(x)$	$\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$		$1-S(x)$	$1-e^{-\int_0^x \mu_t \, dt}$	$1-\dfrac{l_x}{l_0}$
$S(x)$	$\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt$	$1-F(x)$		$e^{-\int_0^x \mu_t \, dt}$	$\dfrac{l_x}{l_0}$
μ_x	$\dfrac{f(x)}{1-\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt}$	$\dfrac{F'(x)}{1-F(x)}$	$-\dfrac{S'(x)}{S(x)}$		$-\dfrac{l'_x}{l_x}$

OBSERVACIONES

- Si $n = 1 \quad \therefore \quad q_x = \displaystyle\int_0^1 {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ \mathrm{d}t$
- ${}_{n/m}q_x = \displaystyle\int_n^{n+m} {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ \mathrm{d}t$
- ${}_xp_0 = S(x) = e^{-\int_0^x \ \mu_t \ \mathrm{d}t}$

En resumen, en el Cuadro 2.1 se muestran las relaciones entre las principales funciones biométricas: $f(x)$, $F(x)$, $S(x)$, μ_x y l_x.

2.4.2. Modelos de supervivencia sobre base empírica

Hasta el momento hemos estudiado los fundamentos probabilísticos propios del fenómeno de la mortalidad, y las probabilidades más relevantes que se derivan de dichos fundamentos. Sin embargo, también se pueden construir modelos de fallecimiento/quiebra sobre una base empírica a partir de los datos estadísticos relativos a la mortalidad (Registro Civil, censos, etc.), de la siguiente manera:

Elegida una población inicial l_0 llamada *raíz* de la tabla se definen:

$$
\begin{array}{ll}
d_0 = l_0\, q_0 & l_1 = l_0 - d_0 \\
d_1 = l_1\, q_1 & l_2 = l_1 - d_1 = l_0 - (d_0 + d_1) \\
\vdots & \vdots \\
d_x = l_x\, q_x & l_x = l_0 - \sum_{i-0}^{x-1} d_i
\end{array}
$$

donde:

l_x es el número de sobrevivientes a la edad x
d_x es el número de fallecimientos a la edad x
q_x es la probabilidad de fallecimiento a la edad x

En la Tabla 1 del Anexo 3 se muestra una tabla de mortalidad elaborada para la población ecuatoriana.

2.4.3. Estimación de μ_x en el modelo empírico

Teorema 2.4 *Cuando l_x viene dado por una tabla de mortalidad y no se conoce su distribución, los valores de μ_x pueden estimarse como:*

$$\mu_x = \frac{1}{2}\,(\ln\ l_{x-1} - \ln\ l_{x+1})$$

DEMOSTRACIÓN

$${}_np_x = e^{-\int_0^n\ \mu_{x+t}\ dt}$$

Si $n = 1$:

$$\begin{aligned}
p_x &= e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\ dt} \\
\ln p_x &= -\int_0^1 \mu_{x+t}\ dt \\
\int_0^1 \mu_{x+t}\ dt &\simeq \mu_{x+1/2}
\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}
\ln p_x &= -\mu_{x+1/2} \\
-(\ln p_{x-1} + \ln p_x) &= -\int_{-1}^1 \mu_{x+t}\ dt \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Aproximando la integral en 2.1:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \mu_{x+t}\ dt &\simeq 2\mu_x = -\ln\ p_{x-1} - \ln\ p_x \\
\mu_x &\simeq -\frac{1}{2}\big(\ln\ p_{x-1} + \ln\ p_x\big) \\
&\simeq \frac{1}{2}\big(\ln\ l_{x-1} - \ln\ l_{x+1}\big)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

En el Anexo 1 se muestra el gráfico para l_x y μ_x en la población ecuatoriana.

2.5. Otros parámetros de sobrevivencia y mortalidad

A continuación se definen otros parámetros importantes que indican características especiales de una población:

2.5.1. Esperanza de vida abreviada y completa

La esperanza de vida se representa en los casos discreto y contínuo como e_x y $\mathring{e}_x$ respectivamente y se define de la siguiente manera:

Sea K = años de sobrevivencia (completos) y w = tiempo máximo de vida en la población se denomina *esperanza de vida abreviada* (años esperados completos de vida) al valor esperado de K, es decir:

$$\begin{aligned} e_x &= E(K) \\ &= \sum_{k=0}^{w-(x+1)} kP(K=k) \\ &= \sum_{k=0}^{w-(x+1)} {}_{k+1}p_x \end{aligned}$$

Sea ahora $T =$ tiempo de sobrevivencia futuro, se define la esperanza de vida completa al valor esperado del tiempo de vida futuro T; es decir,

$$\begin{aligned} \mathring{e}_x &= E(T) \\ &= \int_0^{w-x} t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt \end{aligned}$$

Integrando por partes se deduce que:

$$\mathring{e}_x = \int_0^{w-x} {}_tp_x \ dt$$

Nótese que e_x es la esperanza de una variable aleatoria discreta, mientras que $\mathring{e}_x$ es la esperanza de una variable aleatoria continua.

OBSERVACIONES

La aproximación del caso continuo por el discreto resulta en la siguiente fórmula

$$\mathring{e}_x \ \sim \ e_x + \frac{1}{2}$$

2.5.2. Vida probable

Para definir la *vida probable* supongamos que ${}_tp_x$ es contínua, entonces va a existir un $t = \tau$ en el cual:

$${}_\tau p_x = {}_\tau q_x = \frac{1}{2}$$

A τ se lo denomina tiempo de vida probable, i.e. (x) tiene igual probabilidad de fallecer dentro de τ años o de sobrevivir a la edad $x+\tau$.

En otras palabras τ es la mediana de la variable aleatoria tiempo de vida futura.

2.5.3. Número total esperado de años de sobrevivencia

Considerando un colectivo de l_0 personas, denotamos con L_x el *número de años de sobrevivencia* vividos por el colectivo entre las edades x y $x+1$ y lo expresamos como:

$$L_x = \int_0^1 t\ (l_{x+t})(\mu_{x+t})\ dt + l_{x+1}$$

Teorema 2.5

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\ dt$$

DEMOSTRACIÓN

$\displaystyle\int_0^1 t(l_{x+t})(\mu_{x+t})\ dt =$ años vividos por aquellos que mueren entre las edades x y $x+1$; y $l_{x+1} =$ años vividos por aquellos que sobreviven a la edad $x+1$.

$$\begin{aligned} d\ l_x &= -l_x\ \mu_x\ dt \\ d\ l_{x+t} &= -l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt \\ \Rightarrow\ L_x &= -\int_0^1 t\ dl_{x+t} + l_{x+1} \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= d\ l_{x+t} \\ du &= dt & v &= l_{x+t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_x &= -t\ l_{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t}\ dt + l_{x+1} \\ &= -l_{x+1} + \int_0^1 l_{x+t}\ dt + l_{x+1} \\ &= \int_0^1 l_{x+t}\ dt\ \blacksquare \end{aligned}$$

2.5.4. Tanto central de fallecimientos

Se define el tanto central de fallecimientos a la edad x como:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x} \\ &= \frac{\displaystyle\int_x^{x+1} l_t\ \mu_t\ dt}{\displaystyle\int_0^1 l_{x+t}\ dt} \\ m_x &= \frac{\displaystyle\int_0^1 l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt}{\displaystyle\int_0^1 l_{x+t}\ dt} \end{aligned}$$

2.5.5. Número total de años vividos por un grupo

Se representa con T_x al número total de años vividos desde la edad x por el grupo de sobrevivientes procedente de un grupo inicial de l_0 elementos.

Entonces T_x puede expresarse como:

$$T_x = \int_0^{+\infty} t\ l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt$$

Teorema 2.6 *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

i) $T_x = \displaystyle\int_0^{+\infty} l_{x+t}\ dt$

ii) $\mathring{e}_x = \dfrac{T_x}{l_x} = \dfrac{\displaystyle\int_0^{+\infty} l_{x+t}\ dt}{l_x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} {}_tp_x\ dt$

La demostración queda como ejercicio para el lector.

2.6. Hipótesis para edades no enteras

En lo anterior se han analizado las funciones de distribución de la mortalidad y la supervivencia asociadas a edades enteras $x = 0, 1, 2, \ldots$.

En esta sección analizaremos lo que sucede entre dos edades enteras consecutivas x y $x+1$.

Considerando las variables t y y, tales que:

$$0 < t < 1; \quad 0 < y < 1-t$$

se tienen las siguientes suposiciones que pueden hacerse sobre la distribución de estas variables.

2.6.1. Distribución uniforme de la mortalidad

En esta hipótesis se supone que las defunciones d_x, se distribuyen uniformemente a lo largo del año; es decir l_{x+t} es una media ponderada de l_x y l_{x+1}:

$$l_{x+t} \;=\; (1-t)\,l_x \;+\; t\,l_{x+1}$$

De esta manera la hipótesis de distribución uniforme implica que l_{x+t} se calcula por medio de interpolación lineal entre los valores l_x y l_{x+1}.

El siguiente teorema indica las principales implicaciones de esta hipótesis entre las funciones biométricas.

Teorema 2.7 *Bajo la hipótesis de distribución uniforme de las defunciones se cumple que:*

i) $l_{x+t} = l_x - t\ d_x$

ii) ${}_tq_x = t\ q_x$

iii) ${}_tp_x = 1 - t\ q_x$

iv) ${}_yq_{x+t} = \dfrac{{}_yq_x}{1-t\ q_x}$

v) $\mu_{x+t} = \dfrac{q_x}{1-t\ q_x}$

vi) ${}_tp_x\ \mu_{x+t} = q_x$

DEMOSTRACIÓN

Demostremos la parte *i)* del teorema 2.7 donde $l_{x+t} = l_x - t\ d_x$

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= l_x - t(l_x - l_{x+1}) \\ &= l_x - t\ d_x \ \blacksquare \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN

Demostremos la parte *ii)* del teorema 2.7 donde ${}_tq_x = t\ q_x$

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} \\
&= 1 - \frac{(1-t)\ l_x + t\ l_{x+1}}{l_x} \\
{}_tq_x &= 1 - 1 + t - t\ \frac{l_{x+1}}{l_x} \blacksquare
\end{aligned}$$

2.6.2. Fuerza de mortalidad constante

Bajo esta hipótesis se supone que la fuerza de mortalidad es constante a lo largo del año entre las edades enteras x y $x+1$; es decir que $\mu_{x+t} = \mu_x\ \forall\ 0 < t < 1$. En este caso se cumplen las siguientes propiedades:

Teorema 2.8 *Bajo la hipótesis de fuerza de mortalidad constante se cumple que:*

i) ${}_tq_x = 1 - e^{-t\ \mu_x}$

ii) ${}_tp_x = 1 - e^{-t\ \mu_x}$

iii) ${}_yq_{x+t} = 1 - e^{-y\ \mu_x}$

iv) ${}_tp_x\ \mu_{x+t} = e^{-t\ \mu_x}\mu_x$

v) $p_x = ({}_tp_x)^{1/t}$

2.6.3. Hipótesis de Balducci

Bajo esta hipótesis se supone que el recíproco de l_{x+t} es una media ponderada de los recíprocos de l_x y l_{x+1}; es decir,

$$\frac{1}{l_{x+t}} = (1-t)\frac{1}{l_x} + t\ \frac{1}{l_{x+1}}$$

Teorema 2.9 *Bajo la hipótesis de Balducci se cumple:*

---

i) $l_{x+t} = \dfrac{l_x \; l_{x+1}}{t \; l_x + (1-t)l_{x+1}}$

ii) ${}_tq_x = \dfrac{t \; q_x}{1-(1-t) \; q_x}$

iii) ${}_yq_{x+t} = \dfrac{y \; q_x}{1-(1-y-t) \; q_x}$

iv) $\mu_{x+t} = \dfrac{q_x}{1-(1-t) \; q_x}$

v) ${}_tp_x \; \mu_{x+t} = \dfrac{p_x \; q_x}{(1-(1-t) \; q_x)^2}$

Todas las propiedades enunciadas son fáciles de demostrar, bajo las hipótesis indicadas, por ejemplo verifiquemos la fórmula iv) para hallar μ_{x+t} bajo las hipótesis de Balducci.

La hipótesis de Balducci establece que la función cohorte a una edad intermedia entre dos enteras se calcula como:

$$l_{x+t} = \frac{l_x \; l_{x+1}}{t \; l_x + (1-t) \; l_{x+1}}$$

Sabiendo que $\mu_{x+t} = -\dfrac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}$

$$l'_{x+t} = -\frac{l_x \; l_{x+1} \; (l_x - l_{x+1})}{\big(t \; l_x + (1-t) \; l_{x+1}\big)^2}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{x+t} &= \frac{\dfrac{l_x \; l_{x+1} \; (l_x - l_{x+1})}{\big(t \; l_x + (1-t) \; l_{x+1}\big)^2}}{\dfrac{l_x \; l_{x+1}}{\big(t \; l_x + (1-t) \; l_{x+t}\big)}} \\
&= \frac{l_x \; l_{x+1}}{t \; l_x + (1-t) \; l_{x+1}} \\
\mu_{x+t} &= \frac{q_x}{1-(1-t) \; q_x}
\end{aligned}$$

2.7. Algunas leyes de mortalidad importantes

Históricamente desde el siglo XIX muchos investigadores desarrollaron algunos modelos teóricos que buscan explicar el comportamiento de las funciones biométricas, de esta manera investigadores como Moivre, Makeham, Gompertz, etc. plantearon algunas leyes teóricas para describir la mortalidad en una población.

Estos modelos proponen una forma funcional para la supervivencia de una población. La ventaja de desarrollar modelos teóricos tiene dos raíces:

- En primer lugar una metodológica: estudios sobre fenómenos biológicos terminan concluyendo en una determinada forma funcional para las funciones biométricas.

- La segunda raíz es de orden práctica: Una función que dependa de unos pocos parámetros es fácil de manejar.

Los modelos teóricos más importantes son los siguientes:

2.7.1. Ley de Moivre

En esta ley se considera que el número de sobrevivientes l_x es una función lineal decreciente con la edad, es decir:

$$l_x = a + bx;$$

los parámetros a y b son fáciles de determinar, así:

$$l_0 = a + b \cdot 0 = a$$

Y si w es la edad máxima que puede alcanzar un individuo en esa población[3], denominado también infinito actuarial,

$$l_w = 0 = l_x = a + bw$$

De donde $w = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{l_0}{b}$

Así, la función que determina el número de sobrevivientes esperado bajo la ley de Moivre es:

$$l_x = l_0\left(1 - \frac{x}{w}\right); \quad 0 \leq x \leq w$$

[3] A lo largo de este texto se usarán, indistintamente, los símbolos w y ∞ para representar al infinito actuarial

Cuadro 2.2: Ley de Moivre

l_x	$l_0\left(1-\dfrac{x}{w}\right); \quad 0 \le x \le w$
dx	$\frac{l_0}{w}$
μ_x	$\frac{1}{w-x}$
${}_np_x$	$1 - n\ \mu_x$
$S(x)$	$1-\frac{x}{w}$
$\mathring{e}_x$	$\frac{w-x}{2}$

Fácilmente se puede deducir que la fuerza de mortalidad es:

$$\mu_x = \frac{1}{w-x}$$

Y que la tasa de defunciones a la edad x es:

$$d_x = \frac{l_0}{w}$$

Es decir, las defunciones anuales son iguales para todos los años. La linealidad de la función de supervivencia hace evidente este hecho.

En el Cuadro 2.2 se muestran las funciones biométricas bajo la ley de Moivre.

En las Figuras 2.1 y 2.2 se muestra la forma que tienen las funciones y l_x y μ_x bajo la ley de Moivre para el parámetro $w = 100$ y $l_0 = 100000$.

2.7.2. Ley de Gompertz (1825)

Para deducir esta ley consideremos que una medida de la propensión a la muerte es μ_x, entonces una medida de resistencia a la muerte es $\dfrac{1}{\mu_x}$, Gompertz supuso que la resistencia a la muerte decrece proporcionalmente, es decir el crecimiento relativo de μ_x debe ser constante, así:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'_x}{\mu_x} &= -h \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right) &= -h\ \frac{1}{\mu_x} \end{aligned}$$

Figura 2.1: Forma que tiene la función l_x bajo la ley de Moivre

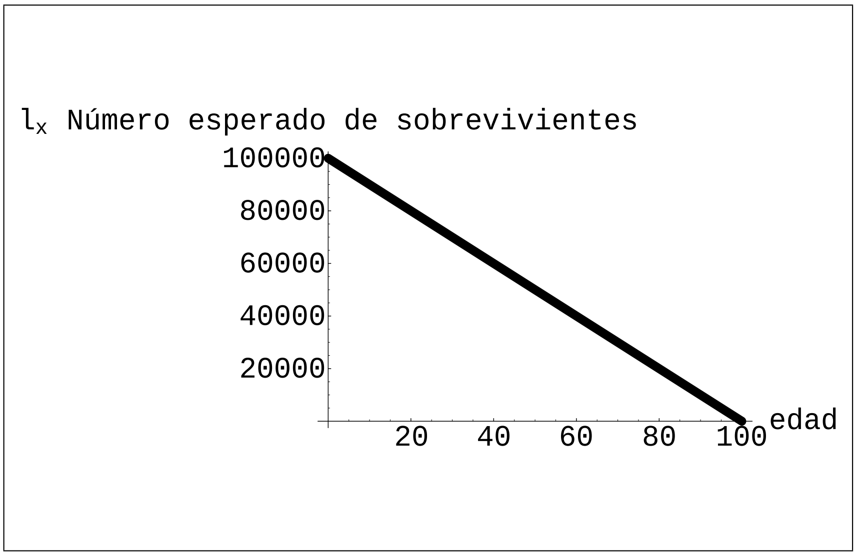
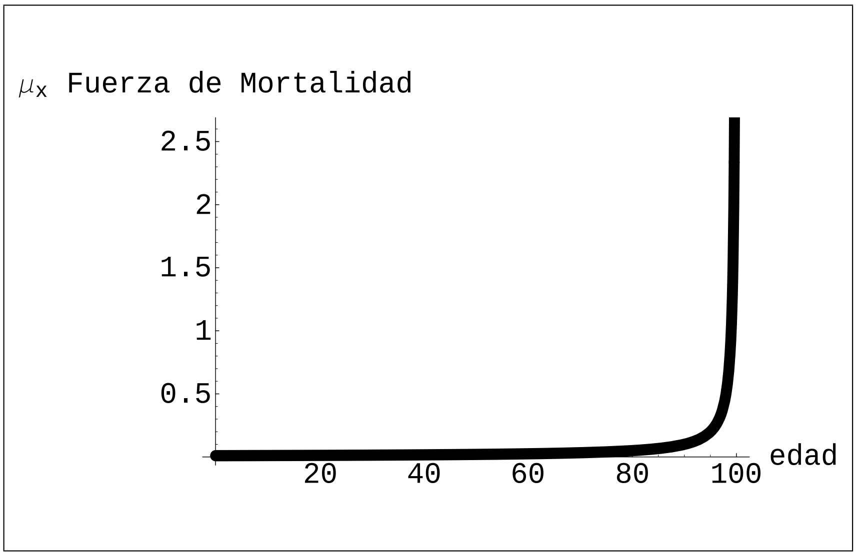


Figura 2.2: Forma que tiene la función μ_x bajo la ley de Moivre



$$
\begin{aligned}
\int \frac{d\left(\dfrac{1}{\mu_x}\right)}{\dfrac{1}{\mu_x}} &= -h \int dx \\
\ln\left(\frac{1}{\mu_x}\right) &= -hx + c \\
\ln \mu_x &= hx - c \\
\mu_x &= e^{hx} e^{-c}
\end{aligned}
$$

Tomando $e^{-c} = \beta$, se tiene que:

$$\mu_x = \beta(e)^{hx}$$

i.e. si se cumple la ley de Gompertz, la fuerza de mortalidad crece geométricamente:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow l_x &= l_0 \ e^{-\int_0^x \mu_y \ dy} \\
&= l_0 \ e^{-\left.\frac{\beta e^{hy}}{h}\right|_0^x} \\
l_x &= l_0 \ e^{-\frac{\beta}{h} e^{hx}} e^{\frac{\beta}{h}}
\end{aligned}
$$

Si $e^h = c$, $\delta = e^{-\frac{\beta}{h}}$, $k = \dfrac{l_0}{\delta}$

$$
\begin{aligned}
l_x &= l_0 \ e^{-\frac{\beta}{h} \ c^x} \delta^{-1} \\
&= l_0 \ \delta^{c^x - 1}
\end{aligned}
$$

Obtengamos ${}_tp_x$ por esta ley:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{l_{x+t}}{l_x} \\
&= \frac{k \ \delta^{c^{x+t}}}{k \ \delta^{c^x}} \\
&= \delta^{c^{x+t} - c^x} \\
{}_tp_x &= \delta^{c^x (c^t - 1)}
\end{aligned}
$$

Cuadro 2.3: Ley de Gompertz

l_x	$l_0\ \delta^{c^x-1};\quad 0 \leq x < +\infty,\quad \delta < 1,\quad c > 1$
dx	$l_0\ \delta^{c^x-1}\left(1-\delta^{c^x(c-1)}\right)$
μ_x	$-\ln\delta\cdot\ln c\cdot c^x$
${}_np_x$	$\delta^{c^x(c^n-1)}$
$S(x)$	δ^{c^x-1}
$\mathring{e}_x$	$\int_0^{+\infty}\delta^{c^x(c^t-1)}\ dt$

Que representa a la probabilidad de que un individuo de edad x alcance la edad $x+t$ bajo la hipótesis de Gompertz.

En el Cuadro 2.3 se muestran las principales funciones biométricas bajo esta ley.

En las Figuras 2.3 y 2.4 se muestra la forma que tienen las funciones l_x y μ_x bajo la ley de Gompertz para los parámetros $l_0 = 100000$, $\delta = 0{,}9$, $c = 1{,}1$:

2.7.3. Primera Ley de Makeham

Además de considerar la resistencia decreciente a la muerte como en el caso de la ley de Gompertz, Makeham considera la presencia de la *propensión* a la muerte en cualquier edad x, (producto por ejemplo de la muerte independiente de la edad (x) esto se traduce en aumentar una constante al modelo de Gompertz:

$$
\begin{aligned}
\mu_x &= A + BC^x \\
l_x &= l_0\ e^{-\int_0^x \mu_y\ dy} \\
&= l_0\ e^{-\int_0^x A+BC^y\ dy} \\
&= l_0\ e^{-\int_0^x A\ dy} e^{-\int_0^x BC^y\ dy} \\
&= l_0\ e^{-Ax}\ e^{-\int_0^x BC^y\ dy} \\
&= l_0\ e^{-Ax}\ \delta^{c^x-1} \\
l_x &= l_0\ S^x\ \delta^{c^x-1}
\end{aligned}
$$

Donde $S = e^{-A}$

Figura 2.3: Forma que tiene la función l_x bajo la ley de Gompertz

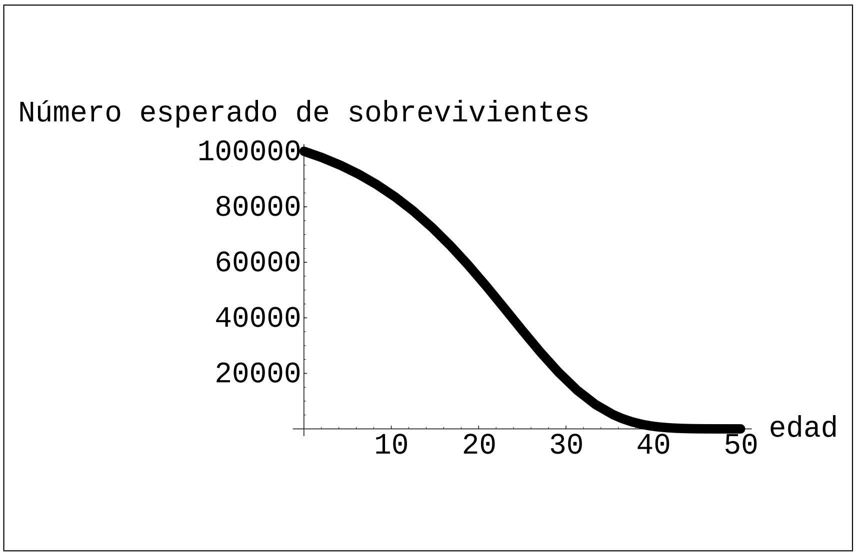
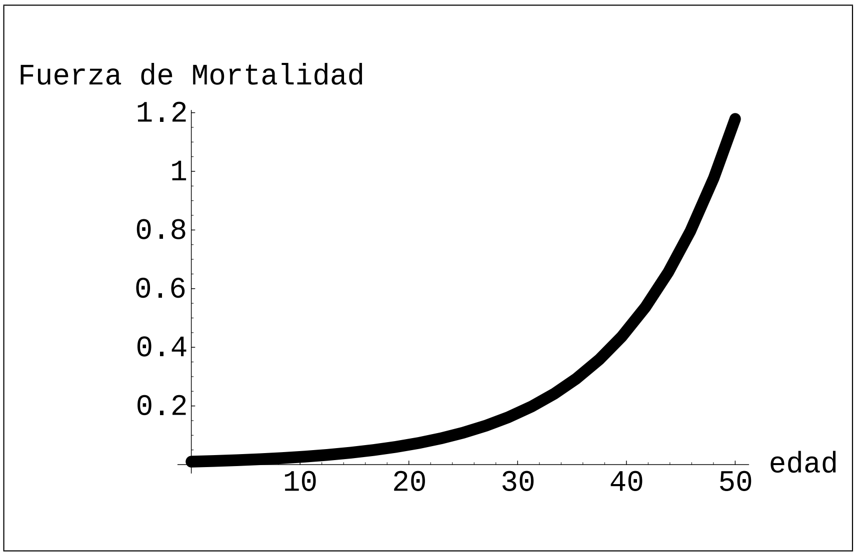


Figura 2.4: Forma que tiene la función μ_x bajo la ley de Gompertz



Cuadro 2.4: Primera Ley de Makeham

l_x	$l_0\ S^x\ \delta^{c^x-1}; \quad 0 \leq x < +\infty, \quad \delta, S < 1, \quad c > 1$
dx	$l_0\ S^x\ \delta^{c^x-1}\left(1 - S\delta^{c^x(c-1)}\right)$
μ_x	$-\ln S - \ln \delta \cdot \ln c \cdot c^x$
${}_np_x$	$S^n\ \delta^{c^x(c^n-1)}$
$S(x)$	$S^x\ \delta^{c^x-1}$
$\mathring{e}_x$	$\int_0^{+\infty} S^t\ \delta^{c^x(c^t-1)}\ dt$

Así ${}_tp_x = S^t\ \delta^{c^x(c^t-1)}$

En el Cuadro 2.4 se muestran las principales leyes biométricas bajo esta ley.

En las Figuras 2.5 y 2.6 se muestra la forma que tienen las funciones l_x y μ_x bajo la primera ley de Makeham para los parámetros $l_0 = 100000$, $\delta = 0{,}9$, $S = 0{,}9$, $c = 1{,}1$:

2.7.4. Segunda Ley de Makeham

En una población típica, la mortalidad por edades primeras suele ser más alta, por lo cual una forma usual para μ_x es la mostrada para la fuerza de la mortalidad en la Figura 6.2 del Anexo 1, la cual ha sido obtenida directamente a partir de los datos de mortalidad en la población ecuatoriana, desgraciadamente la primera Ley de Makeham tiene problemas de ajuste para las edades más jóvenes, por lo que su diseño se hace más real si se añade un término lineal a μ_x:

$$\mu_x = A + Hx + BC^x$$

Es fácil demostrar, siguiendo los pasos anteriores que:

$$l_x = l_0\ S_1^x\ S_2^x\ \delta^{c^x-1}$$

En las Figuras 2.7 y 2.8 se muestra la función l_x y μ_x bajo la segunda Ley de Makeham, nótese la similitud con las dadas en el Anexo 1.

Figura 2.5: Forma que tiene la función l_x bajo la primera ley de Makeham

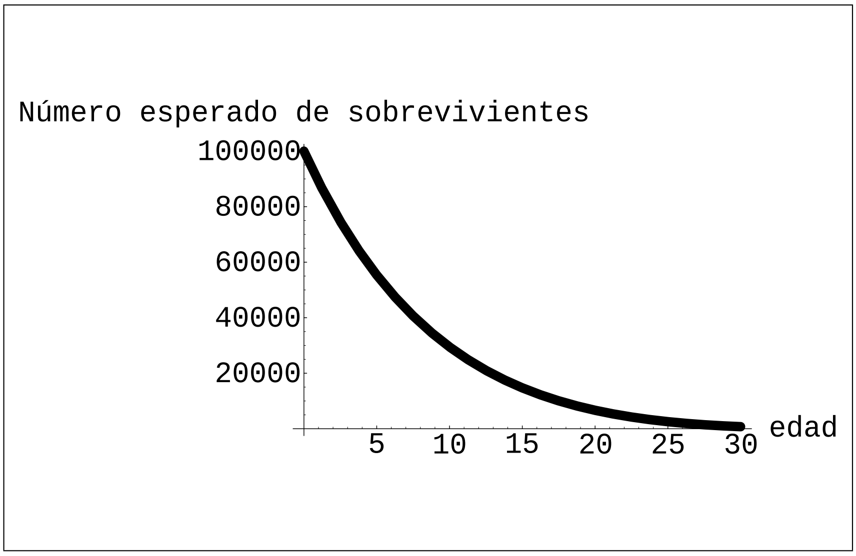


Figura 2.6: Forma que tiene la función μ_x bajo la primera ley de Makeham

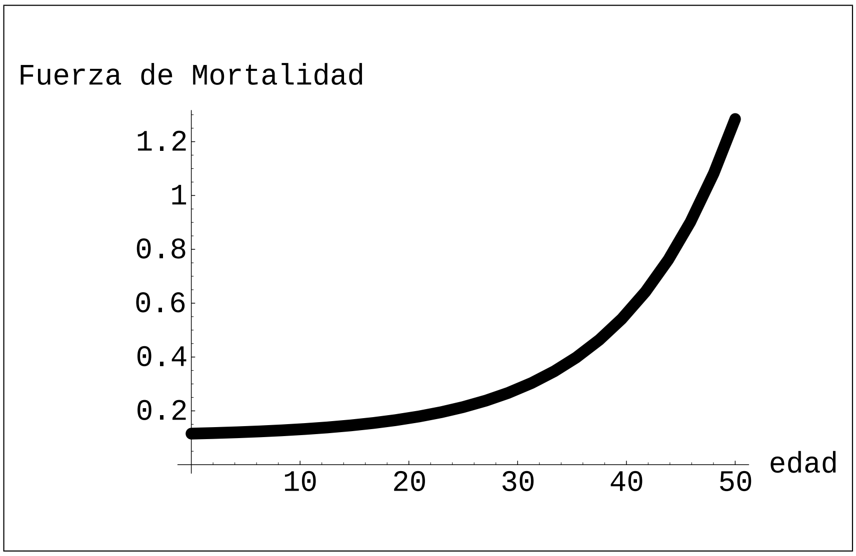


Figura 2.7: Forma que tiene la función l_x bajo la segunda ley de Makeham

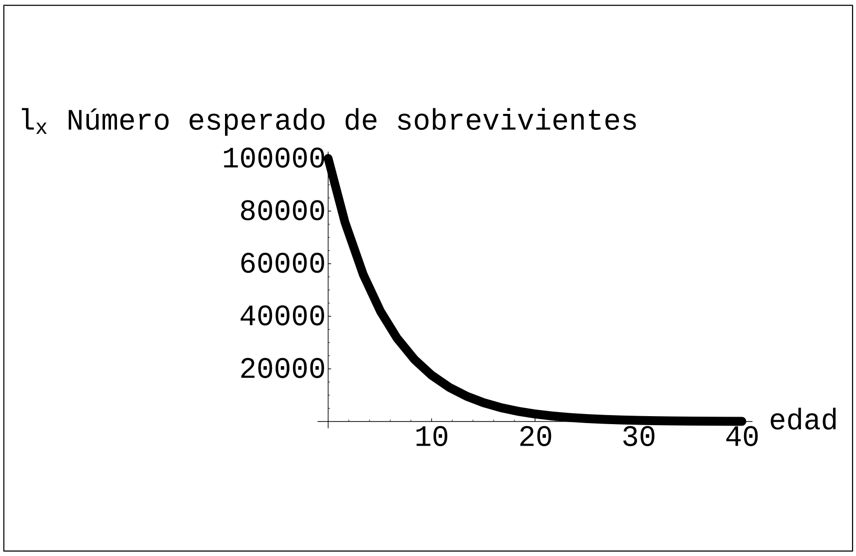
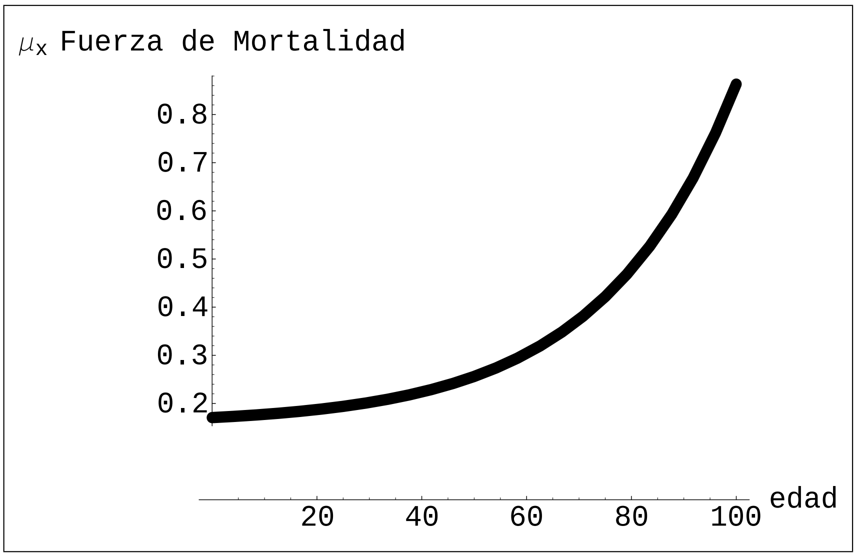


Figura 2.8: Forma que tiene la función μ_x bajo la segunda ley de Makeham



2.8. Problemas resueltos

Problema 2.1 *Si* $S(x) = 1 - \dfrac{x}{100}$, $0 \leq x \leq 100$, *calcular:*

1) μ_x

Solución

$$\begin{aligned}
\mu_x &= -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{-\frac{1}{100}}{1 - \frac{x}{100}} \\
&= \frac{1}{100 - x}
\end{aligned}$$

2) $F(x)$

Solución

$$\begin{aligned}
S(x) &= 1 - F(x) \\
F(x) &= 1 - S(x) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{x}{100}\right) \\
F(x) &= \frac{x}{100}
\end{aligned}$$

3) $f(x)$

Solución

$$f(x) = \frac{d(F(x))}{dx} = \frac{1}{100}$$

4) $P(10 < x < 40)$

Solución

$$\begin{aligned}
P(10 < x < 40) &= \int_{10}^{40} \frac{1}{100}\, dx \\
&= \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Problema 2.2 *Si se conoce que la función de supervivencia de un determinado sector industrial viene dada por la expresión:*

$$S(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \quad para \quad 0 \leq x \leq 100$$

Se pide calcular el tanto instantáneo de quiebra para una empresa del sector que lleva funcionando 25 años.

Solución

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \frac{f(x)}{1-F(x)} \\
&= -\frac{S'(x)}{S(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{x}{100}} \\
\mu_{25} &= \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{25}{100}} = 0{,}013
\end{aligned}$$

Problema 2.3 *Calcular las probabilidades:* ${}_6p_{60}$*,* ${}_{10}q_{56}$*,* ${}_4p_{56}$*, si se conoce que el número esperado de sobrevivientes a los 56 años es* $876,286$*, a los 60 años es* $841,349$ *y a los 66 años es* $763,626$

Solución

$$\begin{aligned}
{}_6p_{60} &= \frac{l_{66}}{l_{60}} = \frac{763,626}{841,349} = 0{,}90762 \\
{}_{10}q_{56} &= 1 - \frac{l_{66}}{l_{56}} = 1 - \frac{763,626}{876,286} = 0{,}12857 \\
{}_4p_{56} &= \frac{l_{60}}{l_{56}} = \frac{841,349}{876,286} = 0{,}96013
\end{aligned}$$

Problema 2.4 *Calcular la probabilidad de supervivencia* ${}_{10}p_{10}$*, sabiendo que el tanto instantáneo de f/q es:*

$$\mu_x = \frac{1}{100-x} + \frac{1}{120-x} \quad para \quad 0 \leq x \leq 100$$

Solución

$$_{10}p_{10} = e^{-\int_{10}^{20}\left(\frac{1}{100-t}+\frac{1}{120-t}\right)\,dt}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 100-t & \qquad w &= 120-t \\ d\mu &= -dt & \qquad dw &= -dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} _{10}p_{10} &= -e^{\int_{10}^{20}\frac{1}{100-t}\,dt - \int_{10}^{20}\frac{1}{120-t}\,dt} \\ &= -e^{-\int_{10}^{20}\frac{1}{u}(-du) - \int_{10}^{20}\frac{1}{u}(-dw)} \\ &= e^{\ln(u)\big|_{10}^{20} - \ln(w)\big|_{10}^{20}} \\ &= e^{\ln(100-t)\big|_{10}^{20} - \ln(120-t)\big|_{10}^{20}} \\ &= 0{,}888 \end{aligned}$$

Problema 2.5 *Sabiendo que $q_x = 0{,}200$ y se verifica la distribución uniforme del acaecimiento de los f/q durante x a $x+1$. Se pide calcular m_x.*

Solución

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \qquad\qquad m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}$$

$$\begin{aligned} q_x &= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} \\ &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\ &= 0{,}200 \\ 0{,}200 &= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} \\ \frac{l_{x+1}}{l_x} &= 1 - 0{,}200 \\ l_{x+1} &= 0{,}8\ l_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_x &= \frac{2(l_x - l_{x+1})}{l_x + l_{x+1}} \\
&= \frac{2(l_x - 0{,}8\ l_x)}{l_x + 0{,}8\ l_x} \\
&= \frac{2\ l_x - 1{,}6\ l_x}{l_x + 0{,}8\ l_x} \\
&= \frac{0{,}4}{1{,}8} \\
m_x &= 0{,}222
\end{aligned}$$

Problema 2.6 *Justificar cual de las siguientes expresiones es verdadera:*

1) $\dfrac{\partial({}_tq_x)}{\partial x} = {}_tp_x\ (\mu_x - \mu_{x+1})$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\partial({}_tq_x)}{\partial x} &= {}_tp_x\ (\mu_x - \mu_{x+1}) \\
\frac{\partial(1 - {}_tp_x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}\right) \\
\frac{\partial(1 - {}_tp_x)}{\partial x} &= -\left(\frac{S'(x+t)S(x) - S(x+t)S'(x)}{S(x)^2}\right) \\
&= -\frac{S'(x+t)S(x)}{S(x)^2} + \frac{S(x+t)S'(x)}{S(x)^2} \\
&= -\frac{S'(x+t)}{S(x)} + \frac{S(x+t)S'(x)}{S(x)S(x)}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial({}_tq_x)}{\partial x} = -\mu_{x+t}\ {}_tp_x - {}_tp_x\ \mu_x \quad \Rightarrow \quad \text{ES FALSA}$$

Problema 2.7 *Si* $S(x) = \left(1 - \dfrac{x}{100}\right)^2$ *para* $0 \leq x \leq 100$. *Se pide calcular* $F(75)$, $f(75)$, μ_{25}.

Solución

$$
\begin{aligned}
S(x) &= 1 - F(x) \\
F(x) &= 1 - S(x) \\
&= 1 - \left(\frac{100-x}{100}\right)^2 \\
F(75) &= 1 - \left(\frac{100-75}{100}\right)^2 \\
&= \frac{15}{16} \\
F'(x) &= 2\left(\frac{100-x}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right) \\
&= 2\left(\frac{100-x}{100^2}\right) \\
f(75) &= 2\left(\frac{100-75}{10000}\right) \\
&= \frac{1}{200} \\
\mu_x &= \frac{f(x)}{1-F(x)} \\
\mu_{25} &= \frac{\frac{1}{200}}{1-\frac{15}{16}} = 0{,}08
\end{aligned}
$$

Problema 2.8 *Si* $l_{25} = 1000$, $l_{28} = 955$, $q_{25} = 0{,}010$, $p_{27} = \dfrac{955}{975}$. *Se pide obtener el valor de* q_{26}.

Solución

$$
q_{26} = \frac{d_{26}}{l_{26}} \qquad p_{27} = \frac{l_{28}}{l_{27}} = \frac{955}{975}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{26} &= l_{26} - l_{27} \\
&= 990 - 975 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
q_{25} &= 1-\frac{l_{26}}{l_{25}}\\
0{,}010 &= 1-\frac{l_{26}}{l_{25}}\\
l_{26} &= (1-0{,}010)\times l_{25}\\
&= 990\\
\Rightarrow q_{26} &= \frac{15}{990}
\end{aligned}$$

Problema 2.9 *Si la función de densidad de probabilidad de la variable* ξ *viene dada por la expresión:*

$$f(x)=\left(\frac{2x}{6400}\right) \quad \textit{para} \quad 0\le x\le 80$$

Se pide calcular la probabilidad ${}_{20}p_{40}$.

Solución

$$P(40\le \xi \le 60 \mid \xi > 40)$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{2t}{6400}\,dt\\
&= \frac{2}{6400}\int_0^x t\,dt\\
&= \frac{1}{3200}\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x\\
&= \frac{1}{3200}\frac{x^2}{2}\\
S(x) &= 1-F(x)\\
&= 1-\frac{x^2}{6400}\\
{}_{20}q_{40} &= \frac{S(40)-S(60)}{S(40)}\\
&= 1-\frac{1-\frac{3600}{6400}}{1-\frac{1600}{6400}}\\
{}_{20}q_{40} &= \frac{20}{48}
\end{aligned}$$

$$_{20}P_{40} \quad = \quad 1 - \frac{20}{48} = \frac{7}{12}$$

Problema 2.10 *Para una función de densidad de probabilidad de la edad de fallecimiento*

$$f(x) = \left(\frac{2x}{6400}\right) \quad \textit{con} \quad 0 \leq x \leq 80$$

y, $(x) = 40$ *se pide una expresión de la función de densidad de probabilidad de la variable* $T = T(40)$.

Solución

La densidad de la variable tiempo de vida futura $T = T(40)$ es:

$$_{t}P_{40}\ \mu_{40+t} = \frac{S(40+t)}{S(40)}\left(-\frac{S'(40+t)}{S(40+t)}\right)$$

Y como

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 - \frac{x^2}{6400} \\ S'(x) &= -\frac{x}{3200} \end{aligned}$$

Entonces

$$_{t}P_{40}\ \mu_{40+t} = \frac{1 - \dfrac{(40+t)^2}{6400}}{1 - \dfrac{40^2}{6400}}$$

Problema 2.11 *Sabiendo que* $_{t}q_{x} = 0{,}10$ *para* $t = 0, 1, 2, \ldots, 9$. *Se pide calcular* $_{2}q_{x+5}$

Solución

$$\begin{aligned} _{t}q_{x} &= {}_{t}p_{x}\ q_{x+t} \\ _{2}q_{x+5} &= \frac{l_{x+5} - l_{x+7}}{l_{x+5}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_5q_x = {}_5p_x \; q_{x+5} &= 0{,}10 \\
{}_6q_x = {}_6p_x \; q_{x+6} &= 0{,}10 \\
\frac{l_{x+5}}{l_x} \times \left(\frac{l_{x+5} - l_{x+6}}{l_{x+5}} \right) &= 0{,}10 \\
\frac{l_{x+6}}{l_x} \times \left(\frac{l_{x+6} - l_{x+7}}{l_{x+6}} \right) &= 0{,}10 \\
\frac{l_{x+5} - l_{x+6} + l_{x+6} - l_{x+7}}{l_x} &= 0{,}10 + 0{,}10 \\
\frac{l_{x+5} - l_{x+7}}{l_x} &= 0{,}20 \\
\frac{l_{x+5}}{l_x} &= 1 - {}_5q_x \\
&= 0{,}90
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \; {}_2q_{x+5} &= \frac{l_{x+5} - l_{x+7}}{l_{x+5}} \\
&= \frac{l_{x+5} - l_{x+7}}{l_x} \; \frac{l_x}{l_{x+5}} \\
&= \frac{0{,}2}{0{,}9} \\
&= 0{,}222
\end{aligned}
$$

Problema 2.12 *Un colectivo tiene como tanto instantáneo de fallecimiento* $\mu_x = A + e^x$ *para* $x \geq 0$. *Y se verifica que* ${}_{0,5}p_0 = 0{,}50$. *Se pide calcular el valor de* A.

Solución

$$
\begin{aligned}
{}_{0,50}p_0 &= e^{\int_0^{0,5} \mu_x \; dx} \\
&= e^{\int_0^{0,5} A + e^x \; dx} \\
&= e^{\int_0^{0,5} A \; dx + \int_0^{0,5} e^x \; dx} \\
\ln(0{,}50) &= -\big(A(0{,}5) + e^{0,5} - e^0\big) \\
0{,}693147 &= (0{,}5A + 1{,}6487 - 1) \\
A &= 0{,}088
\end{aligned}
$$

Problema 2.13 *Sabiendo que en un colectivo el número de supervivientes a la edad x viene dado por la expresión:*

$$1000(w^2 - x^2) \quad \textit{para} \quad 0 \leq x \leq w$$

Se pide determinar el valor de $\mathring{e}_x = E\big(T(x)\big)$.

Solución

$$\begin{aligned}
l_x &= 1000(w^2 - x^2) \\
\Rightarrow l_{x+t} &= 1000\big(w^2 - (x+t)^2\big) \\
&= 1000w^2 - 1000(x+t)^2 \\
\Rightarrow l'_{x+t} &= -2000(x+t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \int_0^w t \ \mu_{x+t} \ {}_tp_x \ dt \\
&= \int_0^w t \ \frac{-l'_{x+t}}{l_{x+t}} \ \frac{l_{x+t}}{l_x} \ dt \\
&= \int_0^w t \ \frac{\big(2000(x+t)\big)}{1000(w^2 - x^2)} \ dt \\
&= \int_0^w \frac{2000xt + 2000t^2}{1000(w^2 - x^2)} \ dt \\
&= \frac{1}{1000(w^2 - x^2)} \left(\frac{2000xt^2}{2} \bigg|_0^w + \frac{2000t^3}{3} \bigg|_0^w \right) \\
&= \frac{1}{1000(w^2 - x^2)} \left(\frac{2000xw^2}{2} + \frac{2000w^3}{3} \right) \\
&= \frac{xw^2}{w^2 - x^2} + \frac{2}{3} \frac{w^3}{w^2 - x^2} \\
&= \frac{w^2\Big(x + \dfrac{2}{3}w\Big)}{w^2 - x^2}
\end{aligned}$$

Problema 2.14 *Sabiendo que la función de supervivencia de un determinado colectivo viene dada por la expresión:*

$$S(x) = \left(\frac{1}{1+x} \right)^3, \quad \textit{para} \quad x \geq 0$$

Se pide determinar la esperanza de vida completa para (13).

Solución

$$
\begin{aligned}
\mathring{e}_{13} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x+t}\right)^3 (1+x)^3 \, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(1+x)^3}{(1+x+t)^3} \, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(14)^3}{(14+t)^3} \, dt \\
\mathring{e}_{13} &= 14^3 \int_0^\infty \frac{1}{(14+t)^3} \, dt \\
&= -\frac{14^3}{2}(14+t)^{-2}\Big|_0^\infty \\
\Rightarrow \mathring{e}_{13} &= 7
\end{aligned}
$$

Problema 2.15 *El tanto instantáneo de f/q viene dado por la expresión:*

$$\mu_x = \frac{1}{50 - \frac{x}{2}} \quad \textit{para} \quad 0 \leq x < 100$$

Se pide obtener una expresión de l_x en función de x, utilizando la relación entre la función de supervivencia y el tanto instantáneo de f/q, y suponiendo que $l_0 = 10000$.

Solución

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{S'(x)}{S(x)} \qquad\qquad l_x = l_0 S(x)$$

$$
\begin{aligned}
S(x) &= e^{-\int_0^x \mu_t \, dt} \\
&= e^{-\int_0^x \frac{2}{100-t} \, dt} \\
&= e^{2\ln(100-t)\big|_0^x} \\
&= e^{2(\ln(100-x)-\ln 100)} \\
&= e^{2\left(\ln\left(\frac{100-x}{100}\right)\right)} \\
S(x) &= \left(\frac{100-x}{100}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_x &= 10000\left(\frac{100-x}{100}\right)^2 \\
l_x &= (100-x)^2
\end{aligned}
$$

Problema 2.16 *Si la función de supervivientes a la edad x viene dada por la expresión*

$$l_x = 10(100-x)^2, \quad 0 \leq x \leq 100$$

Se pide calcular la varianza de la variable aleatoria tiempo de vida futura, $Var\big(T(x)\big)$.

Solución

$$
\begin{aligned}
Var(T) &= E(T^2) - \big(E(T)\big)^2 \\
E(T^2) &= \int_0^{100-x} t^2 \; {}_tp_x \; \mu_{x+t} \; dt \\
&= \int_0^{100-x} t^2 \; \frac{l_{x+t}}{l_x} \; \left(-\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}\right) \; dt \\
&= -\int_0^{100-x} t^2 \; \frac{l'_{x+t}}{l_x} \; dt \\
l_{x+t} &= 10\big(100-(x+t)\big)^2 \\
l'_{x+t} &= 20\big(100-(x+t)\big)(-1) \\
-l'_{x+t} &= 2000-20x-20t \\
E(T^2) &= \int_0^{100-x} \frac{2000t^2-20xt^2-20t^3}{10(100-x)^2} \; dt
\end{aligned}
$$

Luego

$$Var(T) = \frac{(100-x)^2}{18}$$

Problema 2.17 *Calcular el valor de las siguientes expresiones:*

$$\int_0^{w-x} l_{x+t} \; \mu_{x+t} \; dt$$

Solución

$$\begin{aligned}
\int_0^{w-x} l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt &= \int_0^{w-x} l_{x+t} \left(- \frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}} \right) dt \\
&= \int_0^{w-x} -l'_{x+t}\ dt \\
&= -l_{x+t} \Big|_0^{w-x} \\
&= -l_{x+w-x} + l_x \\
&= l_x - l_w \\
\int_0^{w-x} l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt &= l_x
\end{aligned}$$

Problema 2.18 *Calcular el valor de la siguiente expresión:*

$$\int_0^{w-x} {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

Solución

$$\begin{aligned}
\int_0^{w-x} {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt &= {}_tq_x \Big|_0^{w-x} \\
&= \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \Big|_0^{w-x} \\
&= \frac{l_x - l_{x+w-x} - l_x + l_x}{l_x} \\
&= \frac{l_x - l_w}{l_x} \\
\int_0^{w-x} {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt &= 1
\end{aligned}$$

Problema 2.19 *Calcular el valor de la siguiente expresión:*

$$\frac{\partial({}_tp_x)}{\partial x}$$

Solución

$${}_tp_x = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial({}_tp_x)}{\partial x} &= \frac{S'(x+t)S(x) - S'(x)S(x+t)}{\big(S(x)\big)^2} \\
&= \frac{S'(x+t)S(x)}{\big(S(x)\big)^2} - \frac{S(x+t)S'(x)}{\big(S(x)\big)^2} \\
&= \frac{S'(x+t)}{S(x)} - \frac{S(x+t)S'(x)}{S(x)S(x)} \\
&= -\ {}_tp_x\ \mu_{x+t} + \mu_x\ {}_tp_x \\
\frac{\partial({}_tp_x)}{\partial x} &= {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})
\end{aligned}
$$

Problema 2.20 *Si la variable aleatoria T tiene densidad $f(t) = ce^{-ct}$ para $t \geq 0$, $c > 0$, calcular: $\mathring{e}_x$*

Solución

$$
\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= E(T) \\
&= \int_0^{+\infty} t\ ce^{-ct}\ dt \\
\mathring{e}_x &= c\int_0^{+\infty} t\ e^{-ct}\ dt
\end{aligned}
$$

Integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
u &= t & \qquad dv &= e^{-ct} \\
du &= dt & \qquad v &= -\frac{e^{-ct}}{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= c\left[-\left.\frac{t\ e^{-ct}}{c}\right|_0^{+\infty} + \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} e^{-ct}dt\right] \\
&= c\left[\frac{1}{c}\cdot\left.\frac{e^{-ct}}{-c}\right|_0^{+\infty}\right] \\
&= -c\frac{1}{c^2}(0-1) \\
\mathring{e}_x &= \frac{1}{c}
\end{aligned}
$$

Problema 2.21 *Si la variable aleatoria T tiene densidad $f(t) = ce^{-ct}$ para $t \geq 0$, $c > 0$, calcular: $Var(T)$*

Solución

$$Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2$$

$$\begin{aligned} E(T^2) &= \int_0^{+\infty} t^2 \; ce^{-ct} \; dt \\ &= c\int_0^{+\infty} t^2 \; e^{-ct} \; dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= t^2 & dv &= e^{-ct} \\ du &= 2t \; dt & v &= -\frac{e^{-ct}}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(T^2) &= c\left[-\left.\frac{t^2 \; e^{-ct}}{c}\right|_0^{+\infty} + \frac{2}{c}\int_0^{+\infty} t \; e^{-ct} \; dt\right] \\ &= c\left[\frac{2}{c}\cdot\frac{1}{c^2}\right] \\ E(T^2) &= \frac{2}{c^2} \end{aligned}$$

$$\therefore Var(T) = \frac{2}{c^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2}$$

Problema 2.22 *Si la variable aleatoria T tiene densidad $f(t) = ce^{-ct}$ para $t \geq 0$, $c > 0$, calcular: el tiempo de vida media $\tau = Mediana(T)$*

Solución

$$P(T \leq \tau) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} ce^{-ct} = \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad c\cdot\left.\frac{e^{-ct}}{-c}\right|_0^{\tau} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad -e^{-ct}\Big|_0^{\tau} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad -e^{-c\;\tau} + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-c\,\tau} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; c\,\tau &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ c\,\tau &= -\ln(2) \\ \therefore\; \tau &= -\frac{1}{c}\ln(2) \end{aligned}$$

Problema 2.23 *Verificar las fórmulas para $S(x)$ en la ley de Moivre y la ley de Weibull.*

1) Moivre

Solución

$$\mu_x = \frac{1}{w-x}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{w-t}\,dt\right) \\ &= \exp\left(-\ln(w-x)\Big|_0^x\right) \\ &= \exp\Big(-\ln(w-x)+\ln(w)\Big) \\ S(x) &= \exp\left(\ln\frac{w-x}{w}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; S(x) = 1-\frac{x}{w} \qquad \forall \quad 0 \leq x \leq w$$

2) Weibull

Solución

$$\mu_x = k\;x^n$$

$$S(x) = \exp\left(-\int_0^x k\;t^n\;\mathrm{d}t\right)$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \exp\left(k\Big(\frac{1}{n+1}\ t^{n+1}\Big)\Big|_0^x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{k}{n+1}\ x^{n+1}\right) \\ \text{Si } u &= \frac{k}{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ S(x) = \exp\big(-ux^{n+1}\big) \qquad \forall \quad x \geq 0$$

Problema 2.24 *De una tabla de mortalidad estándar, una segunda tabla es preparada para doblar la fuerza de mortalidad de la tabla están-dar. ¿Es q'_x, en la nueva tabla de mortalidad, mas que el doble, exactamente el doble o menos que el doble de la tasa q_x de la tabla estándar?*

Solución

Tabla1: Fuerza de mortalidad $= \mu_x, q_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\ dt}$

Tabla2: Fuerza de mortalidad $= \mu'_x = 2\mu_x, q'_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu'_{x+t}\ dt}$

Luego

$$q'_x = 1 - e^{-2\int_0^1 \mu_{x+t}\ dt}$$

$$\begin{aligned} q'_x - 2q_x &= 1 - e^{-2\int_0^1 \mu_{x+t}\ \mathrm{dt}} - 2 + 2e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\ dt} \\ &= 2e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\ \mathrm{dt}} - e^{-2\int_0^1 \mu_{x+t}\ dt} - 1 \end{aligned}$$

Si ponemos $k = -e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\ dt}$

$$\begin{aligned} q'_x - 2q_x &= -k^2 - 2k - 1 \\ &= -(k-1)^2 < 0 \end{aligned}$$

Por tanto $q'_x - 2q_x < 0$
Así: $q'_x < 2q_x$
Es decir, q'_x de la nueva tabla será menos que el doble que q_x de la tabla original.

Problema 2.25 *Confirme que cada una de las funciones siguientes pueden servir como una fuerza de mortalidad. Exhiba la función de supervivencia correspondiente. En cada caso* $x \geq 0$*:*

1) $Bc^x \qquad B > 0 \quad c > 1 \qquad$ (Gompertz)

Solución

a) $\forall x(\mu_x \geq 0)$

b) Si $x \to +\infty \Rightarrow \mu_x \to +\infty$

Sirve como fuerza de mortalidad dado que cumple las propiedades.

$$
\begin{aligned}
S(x) &= e^{-\int_0^x \mu_t\ dt} \\
\int_0^x Bc^t\ dt &= B\int_0^x c^t\ dt \\
&= B\frac{c^t}{\ln c}\bigg|_0^x \\
&= \frac{B}{\ln c}(c^x - 1) \\
S(x) &= e^{-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)}
\end{aligned}
$$

2) $kx^n \qquad n > 0 \quad k > 0 \qquad$ (Weibull)

Solución

a) $\forall x(\mu_x \geq 0)$

b) Si $x \to +\infty \Rightarrow \mu_x \to +\infty$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty kx^n\ dx &= k\int_0^\infty x^n\ dx \\
&= \frac{k}{n+1}(\infty - 0) = \infty
\end{aligned}
$$

Sirve como fuerza de mortalidad dado que cumple las propiedades.

$$\begin{aligned} S(x) &= e^{-\int_0^x \mu_t \; dt} \\ &= e^{-\int_0^x kt^n \; dt} \\ \Rightarrow \int_0^x kt^t \; dt &= \frac{k}{n+1}(x^{n+1}) \\ \Rightarrow S(x) &= e^{-\frac{k}{n+1}x^{n+1}} \end{aligned}$$

3) $a(b+x)^{-1} \qquad a>0 \quad b>0 \qquad$ (Pareto)

Solución

a) $\forall x(\mu_x \geq 0)$

b) Si $x \to +\infty \Rightarrow \mu_x \to +\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mu_x \; dx &= \int_0^\infty \frac{a}{b+x} \; dx \\ &= a(\ln(b+\infty) - \ln b) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Sirve como fuerza de mortalidad dado que cumple las propiedades.

$$\begin{aligned} S(x) &= e^{-\int_0^x \frac{a}{b+t} \; dt} \\ \int_0^x \frac{a}{b+x} &= a\big(\ln(x+b) - \ln b\big) \\ &= a \ln \frac{x+b}{b} \\ &= e^{-\int_0^x kt^n \; dt} \\ S(x) &= e^{-a \ln \left(\frac{x+b}{b}\right)} \\ &= e^{\left(\frac{x+b}{b}\right)^{-a}} \\ &= \frac{x+b}{b}^{-a} \\ S(x) &= \frac{b}{x+b} \end{aligned}$$

Problema 2.26 *Determine si la siguiente expresión es verdadera*

$$T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{t+1}$$

Solución

w es el instante en que se extingue el grupo o cohorte, es equivalente a infinito.

T_x se denomina cantidad de existencia y mide el número de años vividos por la cohorte a partir de la edad x. La cantidad de existencia T_x se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
T_x &= \int_0^{w-x} l(x+t)\ dt \\
&= \int_0^1 l(x+t)\ dt + \int_0^2 l(x+t)\ dt + \int_0^3 l(x+t)\ dt + \ldots \\
&\quad \ldots + \int_{w-x-1}^{w-x} l(x+t)\ dt \\
&= L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots + L_{w-1} \\
T_x &= \sum_{t=0}^{\infty} L_{x+t}
\end{aligned}$$

Problema 2.27 *Si $\mu_x = Bc^x$, muestre que la función $l_x\mu_x$ tiene máximo en la edad x_0 donde $\mu_{x_0} = \log c$*

Solución

$$\frac{\partial\ l_x\ \mu_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\ l_x\ Bc^x}{\partial x} = 0 \Rightarrow B\big(l'_x\ c^x + l_x\ c^x \ln c\big) = 0$$

$$l'_x = -l_x \ln c$$

$$-\frac{l'_x}{l_x} = \ln c \Rightarrow \mu_{x_0} = \ln c$$

Problema 2.28 *Se conoce que en un determinado sector industrial se cumple: $q_0 = 0{,}7$, $q_1 = 0{,}3$, $q_2 = 0{,}4$, $q_3 = 1$ y que el colectivo inicial está constituido por 1000 elementos, se pide construir la tabla de mortalidad (l_i, d_i) $\forall i = 1, 2, 3$*

Solución

$$d_0 = l_0 q_0 = 1000(0{,}7) = 700$$

- $l_1 = l_0 - d_0 = 1000 - 700 = 300$
  $d_1 = l_1 \ q_1 = 300(0{,}3) = 90$
- $l_2 = l_1 - d_1 = 300 - 90 = 210$
  $d_2 = l_2 \ q_2 = 210(0{,}4) = 84$
- $l_3 = l_2 - d_2 = 210 - 84 = 126$
  $d_3 = l_3 \ q_3 = 126(1) = 126$

Problema 2.29 *Dar las expresiones de las siguientes probabilidades:*

1) Probabilidad que (30) sobreviva 15 años

Solución

$$_{15}p_{30} = \frac{l_{45}}{l_{30}}$$

2) Probabilidad que (40) alcance la edad 50

Solución

$$_{10}p_{40} = \frac{l_{50}}{l_{40}}$$

3) Probabilidad que (40) fallezca entre 50 y 51 años

Solución

$$_{10/1}p_{40} = \frac{l_{50} - l_{51}}{l_{40}}$$

4) Probabilidad que un recién nacido sobreviva por lo menos 60 años

Solución

$$_{60}p_0 = \frac{l_{60}}{l_0}$$

Problema 2.30 *Si en una población el número esperado de sobrevivientes a la edad x viene dado por:*

$$l_x = 800\sqrt{200 - 2x}$$

Calcular:

1) La probabilidad de sobrevivir de los recién nacidos a la mayoría de edad

Solución

$$\begin{aligned}
{}_{18}p_0 &= \frac{l_{18}}{l_0} \\
&= \frac{800\sqrt{200-2(18)}}{800\sqrt{200-2(0)}} \\
&= \sqrt{\frac{164}{200}} \\
{}_{18}p_0 &= 0{,}9055
\end{aligned}$$

2) La probabilidad que teniendo 35 años fallezca antes de los 50 años

Solución

$$\begin{aligned}
{}_{15}p_{35} &= 1-\frac{l_{50}}{l_{35}} \\
&= 1-\frac{800\sqrt{200-2(50)}}{800\sqrt{200-2(35)}} \\
&= 1-\sqrt{\frac{100}{130}} \\
{}_{15}p_{35} &= 0{,}123
\end{aligned}$$

Problema 2.31 *Confirme que* ${}_{k/}q_0 = -\triangle S(K)$ *y que* $\sum_{k=0}^{w-1} {}_{k/}q_0 = 1$

Solución

$${}_{t/n}q_x = {}_nq_{x+t}\ {}_tp_x$$

$$n = 1$$

$$\begin{aligned}
{}_{t/}q_x &= q_{x+t}\ {}_tp_x \\
{}_{k/}q_0 &= q_k\ {}_kp_0 \\
&= \frac{S(k)-S(k+1)}{S(k)}\frac{S(k)}{S(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{k/}q_0 &= S(k) - S(k+1) \\ &= -(S(k+1) - S(k)) \\ {}_{k/}q_0 &= -\bigtriangleup S(K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{w-1} {}_{k/}q_0 &= {}_{0/}q_0 +_{1/} q_0 +_{2/} q_0 + \ldots +_{x/} q_0 \\ &= S(0) - S(1) + S(1) - S(2) + S(2) - S(3) + \ldots \\ &\quad -S(w-1) + S(w+1) - S(w) \\ &= S(0) = 1 \end{aligned}$$

Problema 2.32 *Si la variable aleatoria T tiene función de distribución dada por:*

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{100-x} & ; 0 \le t < 100 - x \\ 1 & ; t \ge 100 - x \end{cases}$$

Calcule:

1) e_x

Solución

$$e_x = E(T) = \int_0^\infty t\ f(t)\ dt$$

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{100-x} & ; 0 \le t < 100 - x \\ 0 & ; \text{resto de } x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e_x &= \int_0^{100-x} t \frac{1}{100-x}\ dt \\ &= \frac{1}{100-x} \left(\frac{t^2}{2} \right) \Bigg|_0^{100-x} \\ e_x &= \frac{1}{100-x} \left(\frac{(100-x)^2}{2} \right) = \frac{100-x}{2} \end{aligned}$$

2) $Var[T]$

Solución

$$Var[T] = E(T^2) - \big(E(T)\big)^2$$

$$\begin{aligned}
E(T^2) &= \int_0^{100-x} t^2 \left(\frac{1}{100-x}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{100-x}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{100-x} \\
&= \frac{1}{100-x}\left(\frac{(100-x)^3}{3}\right) \\
&= \frac{(100-x)^2}{3} \\
Var[T] &= \frac{(100-x)^2}{3} - \frac{(100-x)^2}{4} \\
&= \frac{(100-x)^2}{12}
\end{aligned}$$

3) $Mediana[T]$

Solución

$$\begin{aligned}
Mediana[T] &= m \\
P(T \leq m) &= \frac{1}{2} \\
\int_0^m \frac{1}{100-x}\, dt &= \frac{1}{2} \\
\frac{t}{100-x}\Bigg|_0^m &= \frac{1}{2} \\
\frac{m}{100-x} &= \frac{1}{2} \\
Mediana[T] &= \frac{100-x}{2}
\end{aligned}$$

Problema 2.33 *Muestre que:*

1) $\dfrac{d}{dx}\ {}_tp_x = \ {}_tp_x\ \big(\mu_x - \mu_{x+t}\big)$

Solución

$$ {}_tp_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} $$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ {}_tp_x &= \frac{S'(x+t)S(x) - S(x+t)S'(x)}{(S(x))^2} \\
&= \frac{S'(x+t)S(x)}{(S(x))^2} - \frac{S(x+t)S'(x)}{(S(x))^2} \\
&= \frac{S'(x+t)}{S(x)} - \frac{S(x+t)S'(x)}{(S(x))^2} \\
&= \frac{S'(x+t)}{S(x)}\left(\frac{S(x+t)}{S(x+t)}\right) - \frac{S(x+t)}{S(x)}\left(\frac{S'(x)}{S(x)}\right) \\
&= \frac{S'(x+t)}{S(x+t)}\left(\frac{S(x+t)}{S(x)}\right) - \frac{S(x+t)}{S(x)}\left(\frac{S'(x)}{S(x)}\right) \\
&= -\ {}_tp_x\ \mu_{x+t} +\ {}_tp_x\ \mu_x \\
\frac{d}{dx}\ {}_tp_x &= {}_tp_x\ \big(\mu_x - \mu_{x+t}\big)
\end{aligned}
$$

2) $\dfrac{d}{dx}\ e_x = \ e_x\ (\mu_x - 1)$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ e_x &= \frac{d}{dx}\int_0^\infty\ {}_tp_x\ dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dx}\ {}_tp_x\ dt \\
&= \int_0^\infty\ {}_tp_x\big(\mu_x - \mu_{x+t}\big)\ dt \\
&= \int_0^\infty\ {}_tp_x\ \mu_x\ dt - \int_0^\infty\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt \\
&= \mu_x \int_0^\infty\ {}_tp_x\ dt - \int_0^\infty\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt \\
\frac{d}{dx}\ e_x &= e_x\ \mu_x - 1
\end{aligned}
$$

Problema 2.34 *Calcular* ${}_{1/2}p_{65}$ *por cada hipótesis de fallecimiento en fracción de año utilizando:* $l_{65} = 77{,}107$ *y* $l_{66} = 75{,}520$

1) Distribución Uniforme

Solución

$$\begin{aligned}
{}_{1/2}p_{65} &= 1 - {}_{1/2}q_{65} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l_{65} - l_{66}}{l_{65}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{77{,}107 - 75{,}520}{77{,}107}\right) \\
{}_{1/2}p_{65} &= 0{,}98971
\end{aligned}$$

2) Fuerza Constante

Solución

$$\begin{aligned}
e^{-\mu t} &= {}_{1/2}p_{65} \\
\mu_x &= -\ln p_x \\
\Rightarrow_{1/2}\ p_{65} &= e^{\ln p_x t} \\
&= e^{\ln p_{65} t} \\
{}_{1/2}p_{65} &= e^{\ln p_{65}(0{,}5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow_{1/2}\ p_{65} &= e^{\ln\left(\frac{l_{66}}{l_{65}}\right)0{,}5} \\
&= e^{\ln\left(\frac{75{,}520}{77{,}107}\right)0{,}5} \\
&= e^{-0{,}010398} \\
{}_{1/2}p_{65} &= 0{,}989655
\end{aligned}$$

3) Balducci

Solución

$$\frac{p_x}{1-(1-t)q_x} = \frac{\dfrac{l_{66}}{l_{65}}}{1 - 0{,}5\left(\dfrac{l_{65} - l_{66}}{l_{65}}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{p_x}{1-(1-t)q_x} &= \frac{\dfrac{75{,}520}{77{,}107}}{1-0{,}5\left(\dfrac{77{,}107-75{,}520}{77{,}107}\right)} \\
&= \frac{0{,}97942}{1-0{,}5(0{,}02058)} \\
\frac{p_x}{1-(1-t)q_x} &= \frac{0{,}97942}{0{,}98971} = 0{,}98960
\end{aligned}
$$

Problema 2.35 *Si* $S(x) = \dfrac{\sqrt{100-x}}{10}$*;* $0 \le x \le 100$*; evalúe:*

1) ${}_{17}p_{19}$

Solución

$$
\begin{aligned}
{}_{17}p_{19} &= \frac{l_{36}}{l_{19}} \\
&= \frac{l_0\ S(36)}{l_0\ S(19)} \\
&= \frac{\sqrt{100-36}}{\sqrt{100-19}} \\
{}_{17}p_{19} &= \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

2) ${}_{15}q_{36}$

Solución

$$
\begin{aligned}
{}_{15}q_{36} &= 1-\frac{l_{51}}{l_{36}} \\
&= \frac{l_0\ S(51)}{l_0\ S(36)} \\
&= 1-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} \\
&= 1-\frac{7}{8} \\
{}_{15}q_{36} &= 0{,}125
\end{aligned}
$$

3) ${}_{15/36}q_{36}$

Solución

$$\begin{aligned}
{}_{15/36}q_{36} &= {}_{15}p_{36} - {}_{28}p_{36} \\
&= \frac{l_{51}}{l_{36}} - \frac{l_{64}}{l_{36}} \\
&= \frac{l_0\ S(51) - l_0\ S(64)}{l_0\ S(36)} \\
&= \frac{\sqrt{49} - \sqrt{36}}{\sqrt{64}} \\
{}_{15/36}q_{36} &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

4) μ_{36}

Solución

$$\begin{aligned}
S'(x) &= -\frac{1}{10}\frac{1}{2}\ (100-x)^{-1/2} \\
&= -\frac{1}{20}\ (100-x)^{-1/2} \\
\mu_{36} &= -\frac{S'(36)}{S(36)} \\
&= 0{,}0078
\end{aligned}$$

5) $\mathring{e}_{36}$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_{36} &= \int_0^{64}\ {}_tp_{36}\ dt \\
{}_tp_{36} &= \frac{S(36+t)}{S(36)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{64-t}}{10}}{\frac{\sqrt{64}}{10}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{36} &= \frac{\sqrt{64-t}}{8} \\
\mathring{e}_{36} &= \int_0^{64} \frac{\sqrt{64-t}}{8}\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\left((64-t)^{3/2}\right)\Big|_0^{64} \\
&= 42{,}66
\end{aligned}
$$

Problema 2.36 *Considere una modificación de la ley de Moivre dada por:*

$$S(x) = \left(1 - \frac{x}{w}\right)^{\alpha} \qquad 0 \leq x \leq w, \qquad \alpha > 0$$

Calcule μ_x *y* $\mathring{e}_x$

1) μ_x

Solución

$$S'(x) = \alpha\left(1 - \frac{x}{w}\right)^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{w}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\mu_x &= -\frac{S'(x)}{S(x)} \\
&= -\frac{\frac{-\alpha}{w}(1-\frac{x}{w})^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{x}{w}\right)^{\alpha}} \\
&= \frac{\alpha}{w}\left(1-\frac{x}{w}\right)^{-1} \\
\mu_x &= \left(\frac{\alpha}{w-x}\right)
\end{aligned}
$$

2) $\mathring{e}_x$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \int_0^{w-x} {}_tp_x \, dt \\
{}_tp_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
&= \frac{\left(1 - \dfrac{x+t}{w}\right)^{\alpha}}{\left(1 - \dfrac{x}{w}\right)^{\alpha}} \\
&= \left(1 - \frac{t}{w-x}\right)^{\alpha} \\
\mathring{e}_x &= \int_0^{w-x} \left(1 - \frac{t}{w-x}\right)^{\alpha} \, dt \\
&= \frac{w-x}{\alpha+1}
\end{aligned}$$

Problema 2.37 *Confirmar que la función $S(x) = e^{-x^3/12}$; $x \geq 0$ puede servir como una función de sobrevivencia. Mostrar la correspondiente μ, $f(x)$, $F(x)$.*

Solución

$$\begin{aligned}
S(0) &= 1 \\
\lim_{x\to\infty} S(x) &= \lim_{x\to\infty} e^{-x^3/12} = 0
\end{aligned}$$

$S(x)$ es decreciente. Por tanto $S(x)$ si es una función de sobrevivencia

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1 - S(x) \\
&= 1 - e^{-x^3/12} \\
f(x) &= \frac{x^2}{4} \, e^{-x^3/12} \\
\mu_x &= -\frac{S'(x)}{S(x)} \\
&= \frac{-\dfrac{x^2}{4} \, e^{-x^3/12}}{e^{-x^3/12}} = \frac{x^2}{4}
\end{aligned}$$

Problema 2.38 *Si la función de supervivencia en una población está dada por:* $S(x) = 1 - (x/12)$, $0 \leq x \leq 12$, *con* $l_0 = 9$, *y considerando que los tiempos de sobrevivencia son independientes, considere la distribución multivariada de* $({}_3D_0,\ {}_3D_3,\ {}_3D_6,\ {}_3D_9)$. *Se pide calcular: El valor esperado de cada variable aleatoria, la varianza de cada variable aleatoria, el coeficiente de correlación entre cada pareja de variables aleatorias.*

Solución

$$ {}_nD_x \qquad \rightarrow \qquad \beta(l_0,\ {}_nq_x) $$

$$ ({}_3D_0,\ {}_3D_3,\ {}_3D_6,\ {}_3D_9) \text{ tiene distribución multinomial} $$

- $E({}_3D_0) = 9\ {}_3q_0 \ = 1 - \dfrac{l_3}{l_0} = 1 - \dfrac{98584}{100000} = (0{,}01416)9 = 0{,}12744$

- $E({}_3D_3) = 9\ {}_3q_3 \ = 1 - \dfrac{l_6}{l_3} = 1 - \dfrac{98459}{98584} = (0{,}00126)9 = 0{,}01141$

- $E({}_3D_6) = 9\ {}_3q_6 \ = 1 - \dfrac{l_9}{l_6} = 1 - \dfrac{98370}{98459} = (0{,}0009039)9 = 0{,}00813$

- $Var({}_3D_0) = 9\ {}_3q_0\ {}_3p_0 \ = 9\left(1 - \dfrac{l_3}{l_0}\right)\left(\dfrac{l_3}{l_0}\right) = 0{,}1256$

- $Var({}_3D_3) = 9\ {}_3q_3\ {}_3p_3 \ = 9\left(1 - \dfrac{l_6}{l_3}\right)\left(\dfrac{l_6}{l_3}\right) = 0{,}01139$

- $Var({}_3D_6) = 9\ {}_3q_6\ {}_3p_6 \ = 9\left(1 - \dfrac{l_9}{l_6}\right)\left(\dfrac{l_9}{l_6}\right) = 0{,}0081226$

- $Var({}_3D_9) = 9\ {}_3q_9\ {}_3p_9 \ = 9\left(1 - \dfrac{l_{12}}{l_9}\right)\left(\dfrac{l_{12}}{l_9}\right) = 0{,}005577$

Problema 2.39 *Si* $\mu_x = \dfrac{3}{100 - x} - \dfrac{10}{250 - x}$ *para* $0 < x < 100$, *calcular:*

1) ${}_{40}p_{50}$

Solución

$$
\begin{aligned}
S(x) &= e^{-\int_0^x \mu_x \; dx} \\
&= e^{-\int_0^x \frac{3}{100-x} - \frac{10}{250-x} \; dx} \\
&= e^{[3\ln(100-x) - 10\ln(250-x)]}\Big|_0^x \\
&= e^{3\ln(100-x) - 10\ln(250-x)}\Big|_0^x \\
&= \frac{(100-x)^3}{(250-x)^{10}} \; e^{\frac{100^3}{250^{10}}} \\
{}_{40}p_{50} &= \frac{S(90)}{S(50)} \\
&= 0{,}0745
\end{aligned}
$$

2) La moda de la distribución de x, la edad de muerte

Solución

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -S'(x) \\
&= \frac{10\big(100-x\big)^3}{\big(250-x\big)^{11}} + \frac{3\big(100-x\big)^2}{\big(250-x\big)^{10}} \\
f'(x) &= -\frac{110\;(100-x)^3}{(250-x)^{12}} + \frac{60\;(100-x)^2}{(250-x)^{11}} - \frac{6\;(100-x)}{(250-x)^{10}}
\end{aligned}
$$

La moda se encuentra en el punto en el cual $f(x)$ toma su valor máximo, esto es cuando $f'(x) = 0$

Luego $x = 77{,}2105$[4]

Problema 2.40 *Verificar las propiedades bajo las hipótesis de fuerza de mortalidad constante y de Balducci.*

Solución

[4]En este caso se usó un paquete computacional para resolver la ecuación

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{S(x+t)} &= \frac{1-t}{S(x)} + \frac{t}{S(x+1)} \\
S(x+t) &= \frac{S(x)\ S(x+1)}{(1-t)\ \big(S(x+1)\big) + t\ S(x)} \\
\mu_{x+t} &= \frac{-S'(x+t)}{S(x+t)} \\
&= \frac{\Big(-S(x+1)+S(x)\Big)S(x)S(x+1)}{\Big((1-t)\ S(x+1)+t\ S(x)\Big)^2} \cdot \\
&\quad \left(\frac{1-t}{S(x)} + \frac{t}{S(x+1)}\right) \\
&= \frac{\Big(-S(x+1)+S(x)\Big)S(x)S(x+1)}{\Big((1-t)\ S(x+1)+t\ S(x)\Big)^2} \cdot \\
&\quad \left(\frac{(1-t)\ S(x+t)+t\ S(x)}{S(x)\ S(x+1)}\right) \\
&= \frac{S(x)-S(x+1)}{(1-t)\ S(x+1)+t\ S(x)} \\
&= \frac{1-\dfrac{S(x+1)}{S(x)}}{(1-t)\ \dfrac{S(x+1)}{S(x)}+t} \\
\mu_{x+t} &= \frac{1-q_x}{(1-t)\ q_x+t}
\end{aligned}
$$

Problema 2.41 *Si* $l_x = 100 - x$ *para* $0 \leq x \leq 100$. *Calcule* ${}_{10}m_{50}$ *donde*

$$
{}_n m_x = \frac{\displaystyle\int_0^n l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt}{\displaystyle\int_0^n l_{x+t}\ dt}
$$

Solución

$$
\begin{aligned}
{}_{10}m_{50} &= \frac{\displaystyle\int_0^{10} (100-x-t)\left(\frac{1}{100-x-t}\right) dt}{\displaystyle\int_0^{10} 100-50-t\ dt} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{10} dt}{\displaystyle\int_0^{10} 50-t\ dt} \\
&= \frac{t\Big|_0^{10}}{50t\Big|_0^{10} - \dfrac{t^2}{2}\Big|_0^{10}} \\
&= \frac{10-0}{500-0-\dfrac{100-0}{2}} \\
{}_{10}m_{50} &= 0{,}02222
\end{aligned}
$$

Problema 2.42 *En base a la tabla de mortalidad del apéndice realice lo siguiente:*

1) Compare los valores de ${}_5q_0$ y ${}_5q_5$

Solución

Partimos de la siguiente probabilidad

$$
{}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad \text{y} \qquad {}_tq_x = 1 -_t p_x
$$

- ${}_5q_0$: en este caso $x = 0$; entonces ${}_5q_0 = 1 - {}_5p_0$

$$
\begin{aligned}
{}_5q_0 &= 1 - \frac{l_5}{l_0} \\
&= 1 - \frac{98495}{100000} \\
{}_5q_0 &= 0{,}01505
\end{aligned}
$$

- ${}_5q_5$: en este caso $x = 5$; entonces ${}_5q_5 = 1 - {}_5p_5$

$$\begin{aligned}
{}_5q_5 &= 1 - \frac{l_{10}}{l_5} \\
&= 1 - \frac{98347}{98495} \\
{}_5q_5 &= 0{,}1503
\end{aligned}$$

2) Evalúe la probabilidad que (25) fallezca entre los 80 y 85 años

Solución

$$x = 25 \qquad \Rightarrow \qquad {}_{55/5}q_{25}$$

Sabemos que: ${}_{t/n}q_x = {}_tp_x \ {}_nq_{x+t}$

$$\begin{aligned}
{}_{55/5}q_{25} &= {}_{55}p_{25} \ {}_5q_{80} \\
&= \left(\frac{l_{80}}{l_{25}}\right)\left(1 - \frac{l_{85}}{l_{25}}\right) \\
&= \left(\frac{43180}{97110}\right)\left(1 - \frac{27960}{43180}\right) \\
{}_{55/5}q_{25} &= 0{,}1567
\end{aligned}$$

Problema 2.43 *Si* $\mu_{x+t} = t$, $t > 0$ *calcular:*

1) ${}_tp_x \ \mu_{x+t}$

Solución

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+t} \ dt} \\
&= e^{-\int_0^t t \ dt} \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \\
{}_tp_x \ \mu_{x+t} &= te^{-\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

2) $\mathring{e}_x$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \int_0^{\infty} {}_tp_x \; dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \; dt \\
\mathring{e}_x &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Este último resultado se tiene integrando la densidad normal:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx &= 1 \\
\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \\
\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Problema 2.44 *Si* $q_{70} = 0{,}04$ *y* $q_{71} = 0{,}05$ *calcular la probabilidad que* (70) *fallezca entre los años* 70 1/2 *y* 71 1/2 *bajo:*

1) La hipótesis que las muertes son uniformemente distribuidas dentro de cada año de edad.

Solución

$${}_yq_{x+t} = \frac{yq_x}{1 - tq_x} \qquad \text{donde} \qquad 0 < t < 1$$

$$\begin{aligned}
{}_{1/2}q_{70+(1/2)} &= \frac{(0{,}5)\; q_{70}}{1 - \dfrac{1}{2}\; q_{70}} \\
&= \frac{(0{,}5)(0{,}04)}{1 - (0{,}5)(0{,}04)} \\
{}_{1/2}q_{70+(1/2)} &= 0{,}02041
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{1/2}p_{70} &= 1 - tq_x \\
&= 1 - (0{,}5)q_{70} \\
&= 0{,}98 \\
{}_{1/2}q_{71} &= tq_x \\
&= (0{,}5)q_{71} \\
&= 0{,}025 \\
{}_{1/2\ /}q_{70} &= (0{,}98)0{,}02041 + 0{,}98(1 - 0{,}02041)0{,}025 \\
&= 0{,}044
\end{aligned}$$

2) La hipótesis de Balducci para cada año de edad.

Solución

$${}_yq_{x+t} = \frac{yq_x}{1-(1-y-t)\ q_x}$$

$$\begin{aligned}
{}_{1/2}q_{70+(1/2)} &= (1-0{,}5)\ q_{70} \\
&= (0{,}5)(0{,}04) \\
&= 0{,}02 \\
{}_{1/2}p_{70} &= 1 - \frac{0{,}5\ q_{70}}{1-(1-0{,}5)\ q_{70}} \\
&= 1 - \frac{0{,}02}{1-0{,}02} \\
&= 0{,}9796 \\
{}_{1/2}q_{71} &= \frac{0{,}5\ q_{71}}{1-(1-0{,}5)\ q_{71}} \\
&= \frac{0{,}025}{1-0{,}025} \\
&= 0{,}02564 \\
{}_{1/2}q_{70} &= (0{,}9796)(0{,}02) + (0{,}9796)(1-0{,}02)(0{,}02564) \\
&= 0{,}0196 + 0{,}02461 = 0{,}04421
\end{aligned}$$

Problema 2.45 *Si los fallecimientos siguen una ley de Moivre y* $\mathring{e}_x = 45$. *Hallar la varianza del tiempo de vida futura de* (20)

Solución

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{l_{x+t}}{l_x} \\
&= \frac{l_0\left(1-\dfrac{x+t}{w}\right)}{l_0\left(1-\dfrac{x}{w}\right)} \\
&= \frac{w-x-t}{w-x} \qquad ; \quad 0 \leq x \leq w \\
{}_tP_{20} &= \frac{w-20-t}{w-20} \\
&= 1-\frac{t}{w-10} \\
\mu_x &= \frac{1}{w-x} \\
\mu_{20+t} &= \frac{1}{w-20-t} \\
\mathring{e}_{20} &= \int_0^{w-20} t \ {}_tp_{20} \ \mu_{20+t} \ dt \\
45 &= \int_0^{w-20} \frac{t}{w-20} \ dt \\
45 &= \frac{(w-20)^2}{2} \ \frac{1}{w-20} \\
w &= 110 \\
Var(T(20)) &= E\big(T(20)^2\big) - \big(E(T(20))\big)^2 \\
&= \int_0^{110-20} t^2 \left(\frac{1}{w-20}\right) dt - 45^2 \\
&= \frac{t^3}{3} \left(\frac{1}{w-20}\right)\Bigg|_0^{90} - 45^2 \\
Var(T(20)) &= \frac{90^2}{3} - 45^2
\end{aligned}
$$

2.9. Problemas propuestos

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas actuarialmente en el rol indicado:

a) $S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, e^{-x/2} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{o sino} \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{o sino} \end{cases}$

c) $\mu_x = \begin{cases} \tan x & ; 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & ; \text{o sino} \end{cases}$

d) $\mu_{x+t} = t \quad ; \quad t \geq 0$

2. Complete la siguiente tabla:

x	l_x	p_x	d_x	μ_x	e_x
80	20				
81		6/10			
82		1/3			
83	2				
84	0				

3. Si $l_x = \sqrt{1 - \dfrac{x}{100}}, \quad 0 \leq x \leq 100$

SE PIDE:

- Hallar la vida esperada promedio completa para un recién nacido en esa población y para un individuo de 80 años.
- Hallar la probabilidad de que un individuo de 15 años fallezca entre los 40 y los 80 años.

4. Comprobar cuál de las siguientes funciones es función de supervivencia, y en el caso afirmativo obtener las respectivas funciones de fuerza de mortalidad y de densidad de la edad de fallecimiento:

a) $S(x) = 1 - \dfrac{x}{105}, \quad 0 < x \leq 105$

b) $S(x) = 1 - \dfrac{2x}{10}, \quad 0 < x \leq 10$

c) $S(x) = \dfrac{9000 - 10x - x^2}{9000}, \quad 0 < x \leq 90$

5. Dada una población con una edad límite de 100 años y una fuerza de mortalidad dada por:

$$\mu_x = \frac{1}{100-x} + \frac{1}{120-x}; \quad 0 \leq x \leq 100$$

SE PIDE:

- Hallar la probabilidad que un individuo de 30 años fallezca entre los 50 y los 90 años.

6. Considerar una modificación de la ley de Moivre dada por:

$$S(x) = \left(1 - \frac{x}{w}\right)^{\alpha}; \qquad \alpha > 0, \qquad 0 \leq x < w$$

SE PIDE:

- Calcular ${}_{10}q_{10}$, ${}_{1/}P_{10}$, P_0, ${}_{10/}P_1$.

7. Si x es la edad de un individuo, T el tiempo de vida futuro, y $T = K + S$, donde K es el número de años enteros futuros de vida y S es la variable aleatoria que representa la parte fraccional del año en que ocurre el fallecimiento, demostrar que si se asume la suposición de distribución uniforme de fallecimientos:

$$P(K = k \cap S \leq s) = P(K = k)P(S \leq s)$$

Es decir, que K y S son variables aleatorias independientes.

8. Si $q_{80} = 0{,}05$ y $q_{81} = 0{,}06$, calcular la probabilidad de que (80) fallezca entre las edades 80 1/2 y 81 1/2 bajo:

a) La suposición de distribución uniforme de fallecimientos

b) La suposición de Balducci

9. La mortalidad de un colectivo está dada por la ley de Makeham con $B = 1$; $c = e$; si se conoce que ${}_{0,5}p_0 = 0{,}50$

SE PIDE:

- El número esperado de sobrevivientes a los 10 años, si el número total de recién nacidos es 100,000
- ${}_2p_5$

10. Demostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\, {}_tp_x = {}_tp_x \left(\mu_x - \mu_{x+t}\right)$$

11. Demostrar que:

    a) Asumiendo la hipótesis de fuerza de mortalidad constante siguiente, demostrar que:

    $$a(x) = \frac{\dfrac{1-e^{-\mu}}{\mu} - e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}$$

    b) Asumiendo la hipótesis de Balducci:

    $$a(x) = \frac{p_x}{q_x^2}\,(q_x + \lg p_x)$$

12. Si $l_{25} = 1000$, $l_{28} = 955$, $q_{25} = 0{,}010$ y $p_{27} = 955/975$.
    SE PIDE:

    - Obtener el valor de q_{26}

13. Si $\mu_x = 2/(100-x)$ para $0 \leq x < 100$.
    SE PIDE:

    - Determinar $S(x)$, l_x, $F(x)$, $f(x)$

14. La hipótesis de Gompertz equivale a $\mu_x = Be^x$.
    SE PIDE:

    - Determinar la forma de la función l_x si $l_0 = k_0$ y $l_1 = k_1$

15. Sabiendo que $l_x = 1000(1-(x/100))$ para $0 \leq x \leq 100$.
    SE PIDE:

    - Calcular la esperanza de vida abreviada e_{90}

16. Se conoce la fórmula

    $$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}$$

    la cual no es muy útil para evaluaciones numéricas, puesto que normalmente no existe una expresión analítica para l_x en función de x, y su valor sólo se conoce para valores enteros de x, por medio de una tabla.
    SE PIDE:

    - Hallar una expresión para calcular μ_x de manera aproximada utilizando el siguiente procedimiento:

    a) Desarrolle en serie de Taylor l_x hasta el cuarto orden

b) Evalúe el resultado en $t = 1$ y restar las ecuaciones resultantes

c) Evalúe el resultado en $t = 2$ y restar las ecuaciones resultantes

d) Deduzca que

$$\mu_x = \frac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12 \; l_x}$$

e) Encuentre esta aproximación para $x = 30$ y compárela con la obtenida con la fórmula de aproximación:

$$\mu_x \simeq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{l_{x-1}}{l_{x+1}}\right), \qquad \text{para} \qquad x = 30$$

f) Si los f/q siguen la ley de Moivre con $\mathring{e}_{20} = 45$, hallar el valor exacto de μ_x para $x = 30$

17. Sabiendo que un colectivo de 1000 personas con límite de edad de 100 años sigue la ley de Moivre.
SE PIDE:
   - Hallar la esperanza de vida abreviada e_{90}

18. Sabiendo que $q_x = 0{,}2$ y que se verifica la distribución uniforme del acaecimiento de los fallecimientos durante el año x a $x + 1$.
SE PIDE:
   - Calcular m_x.

19. Si se conoce que la función de supervivencia de un determinado colectivo está dado por:

$$S(x) = \left(\frac{1}{1 + x}\right)^3 \qquad \text{para} \qquad x \geq 0$$

SE PIDE:
   - Hallar la esperanza de vida completa para (13)

20. Si $\mu_x = 0{,}001$ para $20 \leq t \leq 25$ evalúe ${}_{2/2}q_{20}$.

21. Una población tiene como tanto instantáneo de fallecimiento para (x):

$$\mu_x = A + e^x, \qquad \text{para} \qquad x \geq 0$$

y se verifica que ${}_{0{,}5}p_0 = 0{,}5$
SE PIDE:

- Hallar el valor de A

22. Construir una tabla actuarial con valores de q_x, l_x, y d_x para las edades 13 y 14 años para una población cuya mortalidad sigue la ley de Makeham con $A = 7 \times 10^{-4}$; $B = 5 \times 10^{-5}$; $C = 10^{0,04}$.

23. Si la variable aleatoria tiempo de vida futura T tiene una función de densidad de probabilidad dada por $f(t) = ce^{-ct}$ para $t \geq 0$, $c > 0$
    SE PIDE:

    - Calcular la esperanza de vida completa de una persona de edad x

24. Demostrar que $\frac{d}{dx}\ \mathring{e}_x = \mathring{e}_x\ \mu_x - 1$

25. Si $\mu_x = \frac{2}{100 - x}$ para $0 \leq x \leq 100$
    SE PIDE:

    - Determinar $S(x)$, l_x, F_x, f_x

26. La hipótesis de Gompertz con parámetro $C = e$ equivale a $\mu_x = Ae^x$
    SE PIDE:

    - Determinar la forma de la función l_x si los valores de l_x para $x = 0$ y $x = 1$ son: $l_0 = k_0$ y $l_1 = k_1$

27. Sabiendo que $l_x = 1000\big(1 - (x/100)\big)$ para $0 \leq x \leq 100$
    SE PIDE:

    - Cacular la esperanza de vida abreviada e_{80} y la esperanza de vida completa $\mathring{e}_{80}$

28. Demuestre que:

    a) La densidad del tiempo de vida futuro $T(x)$ es: ${}_tp_x\ \mu_{x+t}$
    b) La probabilidad de sobrevivencia ${}_tp_x$ para edades fraccionales siguiendo la hipótesis de Balducci es: $p_x/\{1 - (1-t)q_x\}$
    c) ${}_{t/u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_tp_x - {}_uq_{x+t}$
    d) $l_x\ \mu_x$ es decreciente si $\frac{d}{dx}\ \mu_x < \mu_x^2$ (sugerencia: utilizar el criterio de la derivada)

29. Mostrar que k y S son independientes si y solo si la expresión:

$$\frac{{}_{s}q_{x+k}}{q_{x+k}} \quad \text{no depende sobre } k \text{ para} \quad 0 \leq S \leq 1$$

Capítulo 3

Cálculo de seguros de vida

En este capítulo se estudian los modelos de seguros de vida establecidos para reducir el impacto financiero del fallecimiento o la quiebra. Los modelos dependerán únicamente del momento del fallecimiento, i.e, el modelo considerado dependerá de la variable aleatotia $T = T(x)$ (tiempo de vida futura). En este tipo de contrato, la prestación consiste en un solo pago (el capital asegurado) y se denomina *operación de tracto único*.

En general hacemos referencia a colectivos de personas, pero todos los criterios son válidos para empresas, instalaciones, máquinas, etc.

Denotamos con Z el valor actual de la prestación calculado al interés efectivo i. Se denomina el *valor actuarial* a la esperanza matemática de Z, es decir $E(Z)$; que constituye la *prima única pura* de la operación. Por el contrario, el *riesgo* que corre el asegurador por emitir esas pólizas, se ve reflejado en cambio en la varianza de la variable aleatoria z.

3.1. Introducción financiera

3.1.1. Notaciones y definiciones básicas

Se utilizarán las siguientes notaciones, provenientes de las matemáticas financieras[1]:

- i = tasa de interés efectivo anual
- $1 + i$ = factor de acumulación
- $v = \dfrac{1}{1+i}$ = factor de descuento

[1] Conviene que el lector que no esté familiarizado con los conceptos propios de la matemática financiera haga una revisión de estos temas en cualquier texto de matemática financiera

- i^m = tasa de interés nominal convertible a m períodos en el año
- $\delta = \ln(1+i)$ = fuerza del interés

3.1.2. Balance de una inversión periódica en n años

Con una tasa de interés efectiva i, consideremos el balance al año n de un capital inicial invertido C_0 y pagos al final de cada año de $r_1, r_2, r_3, \ldots$ u.m.

Sea C_k el balance en el año k (incluidos los intereses)

$$\Rightarrow C_k = C_{k-1} + iC_{k-1} + r_k \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

Multiplicando por $(1+i)^{n-k}$:

$$(1+i)^{n-k}\ C_k = (1+i)^{n-k+1}\ C_{k-1} + r_k\ (1+i)^{n-k}$$

y sumando se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k}\ C_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k+1}\ C_{k-1} + \sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k}\ r_k$$

Desarrollando las dos primeras sumatorias y simplificando los términos semejantes:

$$\Rightarrow C_n \quad = \quad (1+i)^n C_0 + \sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k} r_k$$

Que corresponde al balance financiero de la inversión periódica luego de n años.

Como: $v = \dfrac{1}{1+i}$ es el factor de descuento.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C_n &= v^{-n} C_0 + \sum_{k=1}^{n} v^{k-n} r_k \\
\Rightarrow v^n C_n &= C_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k r_k \\
\Rightarrow C_0 &= v^n C_n - \sum_{k=1}^{n} v^k r_k
\end{aligned}$$

Que indica al valor del capital inicial necesario para acumular una cantidad C_n luego de n años. En particular si $r_k = 0 \ \forall k = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow C_0 = \upsilon^n C_n$$

Es decir C_0 es el valor actual (o valor presente) de C_n u.m. en n años[2]

3.1.3. Tasa de interés nominal y fuerza del interés

A la tasa de interés nominal capitalizable en m fracciones del año se la representa con $i^{(m)}$ y tiene las siguientes propiedades:

- $\left(1 + \dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i \Rightarrow i^{(m)} = \left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right)m.$
- Se denomina *fuerza del interés* a:
$$\delta = \lim_{m \to +\infty} i^{(m)}$$

Teorema 3.1

$$\delta = \ln(1+i)$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}
i^{(m)} &= \Big((1+i)^{1/m} - 1\Big)\, m \\
&= \frac{(1+i)^{1/m} - (1+i)^0}{\frac{1}{m}} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(1+i)^x \Big|_{x=0} \\
&= (1+i)^x \ln(1+i)\Big|_{x=0} \\
&= \ln(1+i) \\
i^{(m)} &\Rightarrow \delta = \ln(1+i) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

OBSERVACIONES

- $i = e^{\delta} - 1$
- $\upsilon = e^{-\delta}$

---

[2]también de aquí se deduce de manera inmediata que el valor presente de 1 u.m. en n años es υ^n.

3.2. Modelos de seguros de vida y símbolos de conmutación

3.2.1. El valor actuarial

Consideremos un elemento de un colectivo de personas de edad x que contrata un seguro con determinado asegurador, el cual se compromete a indemnizar con 1 u.m. cuando fallece la persona.

El valor financiero *actual* de dicha indemnización es entonces: υ^{ξ}, donde ξ es la variable aleatoria asociada a la pérdida de la característica asociada.

Y el valor *actuarial* se define como la *esperanza* del valor financiero actual: $E(\upsilon^{\xi})$ y que se conoce también como el monto de la prima única pura.

Si se conoce la distribución de ξ:

$$E(\upsilon^{\xi}) = \int_0^{+\infty} \upsilon^{\xi} f(\xi)\ d\xi$$

Ahora bien, generalmente no se conoce la distribución de ξ, sino que mas bien se conocen los estimadores de los parámetros de sobrevivencia mediante una tabla de mortalidad; por tanto, los modelos deben desarrollarse en función de dichos estimadores, a través de los denominados símbolos de conmutación.

3.2.2. Los símbolos de conmutación

A partir de una tabla de mortalidad, y con una tasa de interés i determinada, se definen los siguientes símbolos de conmutación; que son de frecuente uso en los modelos actuariales:

- $C_x = \upsilon^{x+1}\ dx$
- $D_x = \upsilon^x\ l_x$
- $M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$
- $R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}$
- $N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$

- $S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}$

Los símbolos l_x y d_x representan, respectivamente, el número esperado de sobrevivientes y el número esperado de fallecimientos a la edad x, cuyos estimadores siempre están incluidos en las tablas de mortalidad de las poblaciones. v en cambio representa el factor de descuento[3].

Obsérvese que un símbolo de conmutación es una expresión que contiene una parte financiera y otra parte que incluye algún parámetro de mortalidad o sobrevivencia.

En la Tabla 2 y 3 del Anexo 3 se presentan los valores de los símbolos de conmutación para diferentes edades calculados a partir de los datos de mortalidad mostrada en la Tabla 1 del Anexo 3 y para las tasas de interés del 5 % y 10 %.

3.3. Seguros pagaderos al final del año de f/q

En esta sección se construyen los modelos de seguros de vida en los cuales la indemnización es pagadera al final del año de fallecimiento o quiebra (que en adelante se representará con f/q).

3.3.1. Seguro pagadero al final del año de f/q cuando este ocurre luego de t años

Consideremos un valor actuarial de un pago de 1 u.m. al final del año de f/q cuando este ocurre exactamente luego de t años:

El valor actual de la indemnización se representa con ${}_{t/1}\xi_x$ y es igual a:

$$
{}_{t/1}\xi_x = \begin{cases} v^{t+1} & ;\text{con probabilidad } {}_{t/1}q_x = {}_{t/}q_x \\ 0 & ;\text{con probabilidad } {}_{t}q_x \\ 0 & ;\text{con probabilidad } {}_{t+1}p_x \end{cases}
$$

y entonces el monto de la prima única pura representada con ${}_{t/1}A_x$ es:

[3] Véase 3.1.1

$$
\begin{aligned}
{}_{t/1}A_x = E({}_{t/1}\xi_x) &= \upsilon^{t+1} \ {}_{t/}q_x \\
&= \upsilon^{t+1} \ {}_t p_x \ q_{x+t} \\
&= \upsilon^{t+1} \ \frac{l_{x+t}}{l_x} \ q_{x+t} \\
&= \upsilon^{t+1} \ \frac{d_{x+t}}{l_x} \\
&= \frac{\upsilon^{(x+t)+1} \ d_{x+t}}{\upsilon^x l_x} \\
\Rightarrow \ {}_{t/1}A_x &= \frac{C_{x+t}}{D_x}
\end{aligned}
$$

3.3.2. Seguro de vida completa con vigencia a n años

El capital de 1 u.m. es pagadero al final de año de f/q siempre y cuando este ocurra dentro de los n años a partir de la firma del contrato.

Su valor financiero actual será:

$$
\xi^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \upsilon^{t+1} & ; \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \text{ si } t = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & ; \text{con probabilidad } {}_n p_x \end{cases}
$$

y el monto de la prima única pura es:

$$
\begin{aligned}
A^1_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} \upsilon^{t+1} \ {}_{t/}q_x \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/1}A_x \\
A^1_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{C_{x+t}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
A^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}}{D_x} \\
\Rightarrow A^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Que es el valor actuarial de este seguro.

Riesgo Asociado: El valor financiero actual del pago de 1 u.m. al final del año del acaecimiento del f/q en términos de la fuerza del interés es:

$$
\xi^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} e^{-\delta(t+1)} & ;\text{con probabilidad } {}_{t/}q_x;\ t = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & ;\text{con probabilidad } {}_n p_x \end{cases}
$$

Ahora calculemos el término correspondiente al riesgo que corre el asegurador por emitir la póliza, reflejado por la varianza de esta variable:

$$
Var\left(\xi^1_{x:\overline{n}|}\right) = E\left(\xi^1_{x:\overline{n}|}\right)^2 - E^2\left(\xi^1_{x:\overline{n}|}\right)
$$

Pero

$$
\left(\xi^1_{x:\overline{n}|}\right)^2 = \begin{cases} e^{-2\delta(t+1)} & ;\text{con probabilidad } {}_{t/}q_x;\ t = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & ;\text{con probabilidad } {}_n p_x \end{cases}
$$

Luego, $\left(\xi^1_{x:\overline{n}|}\right)^2$ es el monto de la prima única pura calculada al doble de la fuerza del interés original, la cual se representa con ${}^2A^1_{x:\overline{n}|}$

$$
\Rightarrow Var\left(\xi^1_{x:\overline{n}|}\right) = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - \left(A^1_{x:\overline{n}|}\right)^2
$$

Ahora bien, si la tasa de interés original es i la tasa a la que debe calcularse ${}^2A^1_{x:\overline{n}|}$ es i', que se puede determinar como:

$$\begin{aligned} \delta &= \ln(1+i) \\ 2\delta &= \ln(1+i') \quad \Rightarrow \quad \delta = \ln\sqrt{1+i'} \\ \ln(1+i) &= \ln\sqrt{1+i'} \quad \Rightarrow \\ i' &= (1+i)^2 - 1 \\ &= i^2 + 2i \end{aligned}$$

Luego, ${}^2A^1_{x:\overline{n}|} = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$ pero con los símbolos de conmutación calculados a la tasa de interés $i' = i^2 + 2i$

3.3.3. Seguro de vida completa

Consideremos el seguro en el cual el asegurador indemniza con 1 u.m. al final del año de f/q, cuando quiera que este ocurra.

Su valor actual es:

$$\xi_x = v^{t+1}; \quad \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \quad \text{si } t = 0, 1, 2, \ldots, w-(x+1)$$

Siendo w el infinito actuarial.

Así, el valor actuarial de la prima única pura para este seguro es:

$$\begin{aligned} A_x &= E(\xi_x) \\ &= \sum_{t=0}^{w-(x+1)} v^{t+1} \; {}_{t/}q_x \\ &= \sum_{t=0}^{w-(x+1)} {}_{t/1}A_x \\ &= \sum_{t=0}^{w-(x+1)} \frac{C_{x+t}}{D_x} \\ &= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}}{D_x} \\ A_x &= \frac{M_x}{D_x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

E igual que antes el riesgo es:

$$\begin{aligned} Var(\xi_x) &= E(\xi_x^2) - E^2(\xi_x) \\ &= {}^2A_x - (A_x)^2 \end{aligned}$$

Donde ${}^2A_x$ es el monto de la prima única pura calculada a la tasa:

$$i' = (1+i)^2 - 1$$

Nótese que w es la edad máxima considerada para la población estudiada, en este texto se usará indistintamente la edad límite w o $+\infty$ para representar la cota en los años de vida posibles para los elementos de una población, denominado también infinito actuarial.

3.3.4. Valor actuarial de un capital unitario pagadero una vez transcurrido n años si hay sobrevivencia

Su valor actual es:

$$\xi_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \begin{cases} 0 & ;\text{con probabilidad } {}_nq_x \\ \upsilon^n & ;\text{con probabilidad } {}_np_x \end{cases}$$

Y su valor actuarial (i.e. el monto de la prima única pura) es:

$$\begin{aligned} E\Big(\xi_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\Big) &= \upsilon^n \ {}_np_x \\ &= \frac{\upsilon^{n+x}}{\upsilon^x}\frac{l_{x+n}}{l_x} \\ A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} &= \frac{D_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

E igual que antes:

$$Var\Big(\xi_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\Big) = {}^2A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} - \Big(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\Big)^2$$

3.3.5. Valor Actuarial de un capital unitario pagadero al final del año de f/q de (x) siempre que suceda transcurridos m años y dentro de los n años siguientes

Su valor actual es:

$$
{}_{m/n}\xi_x = \begin{cases} 0 & ;\text{con probabilidad } {}_mq_x \\ v^{t+1} & ;\text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \;\; t = m, m+1, \ldots, m+n-1 \\ 0 & ;\text{con probabilidad } {}_{m+n}p_x \end{cases}
$$

Y el monto de la prima única pura es:

$$
\begin{aligned}
{}_{m/n}A_x &= \sum_{t=m}^{m+n-1} v^{t+1} \;{}_{t/}q_x \\
&= \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_{t/1}A_x \\
&= \sum_{t=m}^{m+n-1} \frac{C_{x+t}}{D_x} \\
{}_{m/n}A_x &= \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Que es el monto de la prima única pura para este caso.

3.3.6. Valor Actuarial de un capital unitario pagadero al final del año de f/q siempre que tal suceso ocurra luego de transcurridos m años

Su valor actual es:

$$
{}_{m/}\xi_x = \begin{cases} 0 & ;\text{con probabilidad } {}_mq_x \\ v^{t+1} & ;\text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \;;\;\; t = m, m+1, m+2, \ldots \end{cases}
$$

El monto de la prima única pura:

$$\begin{aligned}
{}_{m/}A_x &= \sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1}\ {}_{t/}q_x \\
&= \sum_{t=m}^{\infty} {}_{t/1}A_x \\
&= \sum_{t=m}^{\infty} \frac{C_{x+t}}{D_x} \\
{}_{m/}A_x &= \frac{M_{x+m}}{D_x}
\end{aligned}$$

3.3.7. Valor actuarial de un capital unitario mixto temporal por n años

En este modelo consideramos una combinación de un seguro temporal por n años y un capital diferido por n años (casos considerados en 3.3.2 y 3.3.4.

Su valor actual se representa con:

$$\xi_{x:\overline{n|}} = \begin{cases} v^{t+1} & ;\text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \quad ; \quad t = 0, 1, \ldots, n-1 \\ v^n & ;\text{con probabilidad } {}_{n}p_x \end{cases}$$

Y su valor actuarial es:

$$\begin{aligned}
A_{x:\overline{n|}} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t/}q_x + v^n\ {}_{n}p_x \\
&= A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \\
A_{x:\overline{n|}} &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}$$

Que es el valor actuarial de este capital. En los ejercicios de este capítulo se encuentran numerosas aplicaciones y cálculos referentes a estas operaciones de seguros.

3.4. Seguros pagaderos al momento del f/q

En esta sección consideramos los modelos de seguros cuya indemnización ahora es pagadera al momento del f/q de la persona asegurada.

La notación que se usa en estos modelos es la misma que la anterior pero con un guión en la parte superior, esta raya indica que el cálculo se realiza en el campo continuo.

3.4.1. Para un seguro temporal a n años

Consideremos el valor actuarial de un seguro de 1 u.m. pagadera al momento del f/q si este ocurre dentro de los n años de vigencia del seguro.

Su valor actuarial se representará con:

$$\overline{\xi^1}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^t & ;\text{con función de densidad } {}_tp_x\ \mu_{x+t}; \quad t \leq n \\ 0 & ;\text{sino} \end{cases}$$

Luego su valor actuarial será:

$$\overline{A^1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

Y su varianza: $Var\left(\overline{\xi^1}_{x:\overline{n}|}\right) = {}^2\overline{A^1}_{x:\overline{n}|} - \left(\overline{A^1}_{x:\overline{n}|}\right)^2$ donde ${}^2\overline{A^1}_{x:\overline{n}|}$ es el monto de la prima calculada al doble de la fuerza de interés.

Nótese que ${}_tp_x\ \mu_{x+t}$ representa la densidad del tiempo de vida futuro $T(x)$ para un individuo de edad x. Obviamente para poder obtener resultados concretos se necesita conocer la distribución de la mortalidad de la población, a través de alguna de las funciones: $S(x)$, μ_x o ${}_tP_x$, aunque en la práctica se realiza una aproximación en el caso discreto a través de un factor de corrección, tal como se analiza en 3.5.

3.4.2. Para un seguro de vida completa

Consideremos el valor actuarial de un seguro de 1 u.m. pagadera al momento del f/q en cualquier momento que ocurra.

Su valor actual es: $\overline{\xi}_x = v^t$ con densidad ${}_tp_x\ \mu_{x+t},\ t > 0$

Y el valor actuarial:

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

E igual que antes: $Var\left(\overline{\xi}\right) = {}^2\overline{A}_x - \left(\overline{A}_x\right)^2$

Discretización del caso continuo: Consideremos ahora un seguro de vida entera de una prestación de 1 u.m. pagadera al final de la $1/m$-ésima parte del año en la cual ocurre el f/q.

La expresión de la prima única pura es: $A_x^{(m)}$
Como

$$
\begin{aligned}
{}_{t/}q_x &= l_{x+t} - l_{x+t+1} \\
\Rightarrow A_x^{(m)} &= \upsilon^{1/m}\frac{l_x - l_{x+1/m}}{l_x} + \upsilon^{2/m}\frac{l_{x+1/m} - l_{x+2/m}}{l_x} + \dots \\
&= -\frac{1}{l_x}\Big[\upsilon^{1/m}\Big(l_{x+1/m} - l_x\Big) + \upsilon^{2/m}\Big(l_{x+2/m} - l_{x+1/m}\Big) + \\
&\quad + \upsilon^{3/m}\Big(l_{x+3/m} - l_{x+2/m}\Big) + \dots\Big] \\
&= -\frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^{t/m}(l_{x+t/m} - l_{x+(t-1)/m})
\end{aligned}
$$

Representando con:

$$
\begin{aligned}
\Delta\ l_{x+t/m} &= l_{x+t/m} - l_{x+(t+1)/m} \\
\Rightarrow A_x^{(m)} &= -\frac{1}{l_x}\ \sum_{t=1}^{\infty}\ \nu^{t/m}\ \Delta\ l_{x+t/m}
\end{aligned}
$$

Sacando el límite cuando m tiende al infinito:

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\ A_x^{(m)} &= -\frac{1}{l_x}\ \lim_{m\to\infty}\ \sum_{t=1}^{\infty}\ \nu^{t/m}\ \Delta\ l_{x+t/m} \\
&= -\frac{1}{l_x}\ \int_0^{+\infty}\ \nu^t\ d\ (l_{x+t})
\end{aligned}
$$

pero,

$$
\frac{d}{dt}\ (l_{x+t}) = l_{x+t}\ \mu_{x+t} \qquad \Rightarrow \qquad d(l_{x+t}) = -l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\ A_x^{(m)} &= \frac{1}{l_x}\ \int_0^{+\infty}\ \nu^t\ l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt \\
&= \int_0^{+\infty}\ \nu^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt \\
&= \overline{A}_x
\end{aligned}
$$

Por tanto el caso contínuo coincide con el caso discreto cuando el número de períodos en que se ha fraccionado el año crece indefinidamente.

3.4.3. Seguro mixto

Temporal a n años que proporciona 1 u.m. en el momento del f/q si acaece dentro de los n años, o bien si sobrevive los n años, 1 u.m. en el n-ésimo año (lo que ocurra primero).

Su valor actual es:

$$\bar{\xi}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^t & ;\text{con densidad } {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt, \quad t \leq n \\ v^n & ;\text{con probabilidad } {}_np_x \end{cases}$$

Y el monto de la prima única pura es:

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A^1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

3.4.4. Seguro diferido

El valor actuarial del seguro diferido en m años cuya prestación es de 1 u.m. al momento del f/q si este acaece luego de m años se calcula como:

Valor actual:

$$_{m/}\bar{\xi}_x = \begin{cases} v^t & ;\text{con densidad } {}_tp_x\ \mu_{x+t} \text{ para} \quad t \geq m \\ 0 & ;\text{con probabilidad } {}_mq_x \end{cases}$$

Y el valor actuarial:

$$_{m/}\overline{A}_x = \int_m^{+\infty} v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

3.4.5. Diferido a m años y temporal por n años

Consiste la prestación en el pago de 1 u.m. al momento del f/q si este acaece luego de m años y dentro de los n años siguientes:

El valor actual es:

$$_{m/n}\bar{\xi}_x = \begin{cases} v^t & ;\text{con densidad } {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ ;\ m \leq t \leq m+n \\ 0 & ;\text{sino} \end{cases}$$

Y el valor actuarial:

$$_{m/n}\overline{A}_x = \int_m^{m+n} \upsilon^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt$$

3.5. Relación entre los seguros pagaderos al momento y al final del año de f/q

Supongamos que los fallecimientos se distribuyen de manera uniforme a lo largo del año de f/q, así para el caso de un seguro temporal a n años se tendría:

$$\overline{A^1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \upsilon^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt$$

Y para 1 año, $n = 1$:

$$\overline{A^1}_{x:\overline{1}|} = \int_0^1 \upsilon^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt$$

pero:

$$\begin{aligned} {}_tp_x \ \mu_{x+t} &= -\frac{d}{dt} \ ({}_tp_x) \\ &= -\frac{d}{dt} \ (1 - t \cdot q_x) \\ {}_tp_x \ \mu_{x+t} &= q_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{A^1}_{x:\overline{1}|} &= \int_0^1 \upsilon^t \ q_x \ dt \\ &= q_x \int_0^1 \upsilon^t \ dt \\ &= q_x \ \frac{\upsilon^t}{\ln \upsilon}\Big|_0^1 \\ \overline{A^1}_{x:\overline{1}|} &= q_x \ \frac{\upsilon - 1}{\ln\left(\dfrac{1}{1+i}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{A^1}_{x:\overline{1}|} &= q_x \, \frac{\upsilon - 1}{-\delta} \\
&= q_x \, \frac{1 - \dfrac{1}{1+i}}{\delta} \\
&= q_x \, \frac{i}{\delta(1+i)} \\
\overline{A^1}_{x:\overline{1}|} &= \frac{i}{\delta} \left(\upsilon \; q_x\right)
\end{aligned}$$

Pero

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \upsilon^{t+1} \; {}_{t/}q_x$$

Por tanto, si $n = 1$:

$$\begin{aligned}
A^1_{x:\overline{1}|} &= \upsilon \; {}_{0/}q_x \\
&= \upsilon \; q_x
\end{aligned}$$

Luego, $\overline{A^1}_{x:\overline{1}|} = \dfrac{i}{\delta} \, A^1_{x:\overline{1}|}$ lo cual es verdadero de manera aproximada para cualquier valor de n; es decir,

$$\overline{A^1}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}$$

Igual resultado se puede extender para los otros tipos de seguros, con lo que se tienen las siguientes fórmulas de aproximación:

- $\overline{A}_x \approx \dfrac{i}{\delta} \, A_x$ (vida entera)
- ${}_{m/}\overline{A}_x \approx \dfrac{i}{\delta} \; {}_{m/}A_x$ (diferido)
- $\overline{A}_{x:\overline{n}|} \approx \left(\dfrac{i}{\delta}\right) A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ (mixto)

OBSERVACIONES

- Desde el punto de vista práctico, es muy conveniente que un factor constante i/δ se pueda usar en todas las edades como un ajuste aproximado para pasar del valor de una prestación pagadera al final del año de f/q a una pagadera al momento del f/q.
- La otra posibilidad es que los valores actuariales de prestaciones pagaderas al momento de f/q se calculen directamente por la integral que lo define, pero como solo se conocen los símbolos de conmutación para edades enteras (a través de la tabla de mortalidad respectiva), entonces esto debe resolverse vía integración numérica, por ejemplo utilizando las fórmulas de Trapecios, Simpson o Newton Cotes.

3.6. Seguros variables pagaderos al final del año de f/q

3.6.1. Temporal a n años creciente

En este caso, la prestación consiste en el pago de cierta cantidad de dinero si el f/q ocurre dentro de n años, de la siguiente manera:

- Pago de 1 u.m. si ocurre entre x y $x+1$
- Pago de 2 u.m. si ocurre entre $x+1$ y $x+2$, y así sucesivamente,
- Pago de n u.m. si ocurre entre $x+n-1$ y $x+n$

El valor actual es:

$$(\xi A)^{1}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} (t+1)\ v^{t+1} & \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \ ;\ t = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & ;\text{con probabilidad } {}_{n}p_x \end{cases}$$

Y su valor actuarial es:

$$\begin{aligned} (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)\ v^{t+1}\ {}_{t/}q_x \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)\ {}_{t/1}A_x \end{aligned}$$

Desarrollando esta suma se tiene:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (IA)^1_{x:\overline{n}|} &= {}_{0/1}A_x + 2\ {}_{1/1}A_x + 3\ {}_{2/1}A_x + \cdots + n\ {}_{n-1/1}A_x \\
&= {}_{0/1}A_x + {}_{1/1}A_x + {}_{2/1}A_x + \cdots + {}_{n-1/1}A_x \\
&\qquad + {}_{1/1}A_x + {}_{2/1}A_x + \cdots + {}_{n-1/1}A_x \\
&\qquad\qquad + {}_{2/1}A_x + \cdots + {}_{n-1/1}A_x \\
&\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad {}_{n-1/1}A_x
\end{aligned}$$

Pero:

$$_{m/n}A_x = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_{t/1}A_x$$

$$\Rightarrow (IA)^1_{x:\overline{n}|} = {}_{0/n}A_x + {}_{1/n-1}A_x + {}_{2/n-2}A_x + \cdots + {}_{n-1/1}A_x$$

Así:

$$\begin{aligned}
(IA)^1_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/n-t}A_x \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_x} \\
(IA)^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}$$

donde se utiliza el símbolo de conmutación:

$$R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}$$

3.6.2. Seguro variable creciente de vida entera

Que proporciona el pago de 1 u.m. si el f/q ocurre dentro del primer año, 2 u.m. si ocurre durante el segundo año, etc. mientras viva. Es decir, la indemnización se incrementa en 1 u.m. por cada año adicional de sobrevivencia.

El valor actual es:

$$(\xi A)_x = (t+1)\ v^{t+1} \qquad ; \qquad \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Y el valor actuarial:

$$\begin{aligned}
(IA)_x &= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)\ v^{t+1}\ {}_{t/}q_x \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)\ {}_{t/1}A_x \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}A_x \\
&= \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t} \\
(IA)_x &= \frac{R_x}{D_x}
\end{aligned}$$

3.6.3. Seguro creciente temporal por n años y diferido por m años

Su valor actual se representa con:

$${}_{m/n}(\xi A)_x = \begin{cases} (t-m+1)\ v^{t+1} & ;\ {}_{t/}q_x;\ t = m, m+1, \ldots, m+n-1 \\ 0 & ;\text{sino} \end{cases}$$

Y el valor actuarial es:

$$\begin{aligned}
{}_{m/n}(IA)_x &= \sum_{t=m}^{m+n-1} (t-m+1)\ v^{t+1}\ {}_{t/}q_x \\
&= \sum_{t=m}^{m+n-1} (t-m+1)\ {}_{t/1}A_x \\
{}_{m/n}(IA)_x &= \frac{C_{x+m} + 2\ C_{x+m+1} + \ldots + n\ C_{x+m+n-1}}{D_x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; {}_{m/n}(IA)_x = \frac{\left(\sum_{t=0}^{n-1} M_{x+m+t}\right) - nM_{x+m+n}}{D_x} = \frac{R_{x+m} - R_{x+m+n} - n\; M_{x+m+n}}{D_x}$$

3.6.4. Seguros decrecientes (pagaderos al final del año de f/q)

Consideremos la prestación de un seguro temporal a n años que proporciona el pago de n u.m. si el suceso ocurre entre las edades x, y $x+1$, $n-1$ u.m. si ocurre entre $x+1$ y $x+2$; $n-2$ u.m. si ocurre entre $x+2$ y $x+3, \ldots, 1$ u.m. si ocurre entre $x+(n-1)$, y $x+n$, a partir de lo cual cesa la prestación.

Entonces, su valor actual es:

$$(D\delta)^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} (n-t)\; v^{t+1} & \text{con probabilidad } {}_{t/}q_x \;;\; t = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Y su valor actuarial:

$$\begin{aligned} (DA)^1_{x:\overline{n}|} &= E\Big((D\delta)^1_{x:\overline{n}|}\Big) \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (n-t)\; v^{t+1}\; {}_{t/}q_x \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (n-t)\; {}_{t/1}A_x \\ (DA)^1_{x:\overline{n}|} &= {}_{0/1}A_x + {}_{0/1}A_x + \cdots + {}_{0/1}A_x \\ &\qquad\quad + {}_{1/1}A_x + \cdots + {}_{1/1}A_x \\ &\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\quad \vdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad {}_{n-1/1}A_x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(DA)^1_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{n} A^1_{x:\overline{t}|} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} \\
\Rightarrow\ (DA)^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{n\ M_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}
\end{aligned}
$$

3.7. Seguros variables pagaderos al momento del f/q

3.7.1. Para un seguro de vida entera

Consideremos un seguro de vida entero cuya prestación consiste en el pago de 1 u.m. al momento del f/q si éste ocurre dentro del 1er año, 2 u.m. en el segundo, etc.

El valor actual es:

$$(\vartheta\overline{A})^1 = [\![t+1]\!]\ v^t \text{ con densidad } {}_tp_x\ \mu_{x+t}, \quad t > 0$$

El valor actuarial:

$$(I\overline{A})^1 = \int_0^\infty [\![t+1]\!]\ v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

En la práctica se utiliza la aproximación al caso discreto; deducida en 3.5:

$$
\begin{aligned}
(I\overline{A})_x &\approx \frac{i}{\delta}\ (IA)_x \\
&= \frac{i}{\delta}\ \frac{R_x}{D_x}
\end{aligned}
$$

3.7.2. Temporal a n años

$$(I\overline{A})^1_{x:\overline{n}|} \approx \frac{i}{\delta}\ (IA)^1_{x:\overline{n}|}$$

3.7.3. Valor actuarial de una operación de seguros de vida entera que proporciona prestaciones crecientes al final de la m-ésima parte del año

Es decir proporciona una indemnización de 1/m u.m. si el f/q ocurre entre 0 y $1/m$, $2/m$, u.m. si el f/q ocurre entre $1/m$ y $2/m$, $3/m$ u.m. si el f/q ocurre entre $2/m$ y $3/m$, y así sucesivamente.

Su valor actuarial es:

$$(I^{(m)}\ A)_x \cong (IA)_x - \frac{m-1}{2m}\ A_x$$

3.7.4. Valor actuarial de una operación de seguros de vida entera que proporciona prestaciones crecientes si el pago se realiza al momento del f/q

$$(\vartheta^{(m)}\overline{A})_x = \frac{t-m+1}{m}\ v^t$$

Siendo t la variable tiempo de vida futuro con distribución ${}_{t/}q_x$.

El valor actuarial es:

$$(I^{(m)}\overline{A})_x \cong (I\overline{A})_x - \frac{m-1}{2m}\ \overline{A}_x$$

3.7.5. Si los pagos se incrementan continuamente con una función $g(t)$

Es decir el pago en el instante t es $g(t)$ u.m.

El valor actual es:

$$z = \left\{\ g(t)\ v^t \quad \text{con distribución } {}_tq_x\ ;\ t \geq 0\right.$$

Y así el valor actuarial es:

$$E(z) = \int_0^{+\infty} g(t)\ v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

En particular si $g(t) = t$ se representa:

$$
\begin{aligned}
(IA)_x &= \int_0^{+\infty} t\ v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt \\
&= \lim_{m\to+\infty} (I^{(m)}\overline{A})_x \\
\Rightarrow\ (\overline{IA})_x &= (I\overline{A})_x - \frac{1}{2}\ \overline{A}_x
\end{aligned}
$$

3.8. Problemas resueltos

Problema 3.1 *Considerada una persona* (35) *cuál es el monto de la prima de un seguro cuya indemnización es de* 100,000 *u.m. pagadero al final del año de f/q.*

1) En cualquier momento que ocurra

Solución

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= 100000\ A_{35} \\
&= 100000 \cdot \frac{M_{35}}{D_{35}}
\end{aligned}
$$

2) Condicionado a que el f/q ocurra antes de cumplir los 45 años

Solución

$$
\begin{aligned}
\pi_2 &= 100000\ A^1_{35:\overline{10}|} \\
&= 100000\ \frac{M_{35} - M_{45}}{D_{35}}
\end{aligned}
$$

3) Condicionado a que el f/q ocurra luego de los 45 años

Solución

$$
\begin{aligned}
\pi_3 &= 100000\ {}_{10/}A_{35} \\
&= 100000\ \frac{M_{45}}{D_{35}}
\end{aligned}
$$

4) Condicionado a que acaezca entre los 60 y los 64 años

Solución

$$\begin{aligned}\pi_4 &= 100000\ {}_{25/4}A_{35} \\ &= 100000\ \frac{M_{60}-M_{64}}{D_{35}}\end{aligned}$$

Problema 3.2 *En el ejemplo anterior calcular el monto de la prima en el caso 2) si la mortalidad sigue una ley de Moivre con edad límite de* 100 *años y que* $i = 4\,\%$ *anual*

Solución

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \upsilon^{t+1}\ {}_{t/}q_x \qquad ; \qquad {}_{t/}q_x = \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

$$\begin{aligned}
A^1_{x:\overline{n}|} &= 100000 \sum_{t=0}^{9} \upsilon^{t+1}\ {}_{t/}q_{35} \\
&= 100000 \sum_{t=0}^{9} \upsilon^{t+1} \left(\frac{l_{x+t}-l_{x+t+1}}{l_x}\right) \\
&= 100000 \sum_{t=0}^{9} \frac{\upsilon^{t+1}(100-x-t-100+x+t+1)}{100-x} \\
& x = 35, \quad n = 10 \\
A^1_{35:\overline{10}|} &= \frac{100000}{65}\,(\upsilon+\upsilon^2+\ldots+\upsilon^{10}) \qquad ; \qquad \upsilon = \frac{1}{1+0{,}04} = \frac{1}{1{,}04} \\
&= \frac{100000}{65}\left(\frac{1}{1{,}04}\right)\frac{1-\left(\dfrac{1}{1{,}04}\right)^{10}}{1-\dfrac{1}{1{,}04}} \\
A^1_{35:\overline{10}|} &= 12478{,}30\ u.m.
\end{aligned}$$

Problema 3.3 *Interpretar y expresar en símbolos de conmutación las siguientes funciones:*

1) $A^1_{30:\overline{15}|}$

Solución

$$A^{1}_{30:\overline{15}|} = \frac{M_{30} - M_{45}}{D_{30}}$$

Valor actuarial de un capital unitario para una persona de 30 años pagadero al final del año de fallecimiento si este se produce antes de cumplir los 45 años.

2) ${}_{10/20}A_{30}$

Solución

$${}_{10/20}A_{30} = \frac{M_{30} - M_{60}}{D_{30}}$$

Valor actuarial de un capital unitario para una persona de 30 años pagadero si al final del año del f/q sobrevive a los 40 años y fallece en los 20 años siguientes.

3) ${}_{10/}A_{30}$

Solución

$${}_{10/}A_{30} = \frac{M_{40}}{D_{30}}$$

Valor actuarial de un capital unitario para una persona de 30 años pagadero al final del año de f/q si se produce su fallecimiento transcurrido por lo menos 10 años después de la firma del contrato.

4) ${}_{10/20}(IA)_{30}$

Solución

$${}_{10/20}(IA)_{30} = \frac{R_{40} - R_{60} - \ {}_{20}M_{60}}{D_{30}}$$

Valor actuarial de una prestación que consiste en el pago de una unidad monetaria si fallece a los 40 años, 2 unidades monetarias si muere a los 41 años y así sucesivamente hasta cumplir los 60 años; para un individuo que a la firma del contrato tenía 30 años.

Problema 3.4 *Se concierta una operación de seguros a favor de* (x) *que proporciona las siguientes prestaciones:*

- 10,000 *u.m. a los 20 años si* (x) *sobrevive.*

- *Reembolso de la prima única* π *al final del año de f/q si esto ocurre durante los 20 primeros años.*

Determinar el monto de la prima única pura.

Solución

$$\begin{aligned} \pi &= 10000\ A_{x:\overline{20|}}^{\ \ 1} + \pi\ A^{1}_{x:\overline{20|}} \\ &= \frac{10000\ \dfrac{D_{x+20}}{D_x}}{1-\dfrac{M_x-M_{x+20}}{D_x}} \\ \Rightarrow \pi &= \frac{10000\ D_{x+20}}{D_x+M_{x+20}-M_x} \end{aligned}$$

Problema 3.5 *Demostrar que:*

$$\frac{d\ (\overline{A}_x)}{di} = -\upsilon\ (\overline{IA})_x$$

Solución

Se conoce que

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty \upsilon^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{di}\left(\int_0^\infty \upsilon^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt\right) &= \frac{d}{di}\left(\int_0^\infty (1+i)^{-t}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt\right) \\ &= \left(\int_0^\infty (-t)\ (1+i)^{-t-1}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt\right) \\ &= \left(-\ \upsilon\int_0^\infty t\ \upsilon^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt\right) \\ &= -\upsilon(\overline{IA})_x \end{aligned}$$

Problema 3.6 *Se concierta una operación de seguros a favor de* (x) *con una prestación de* 50 *u.m. pagadera en el momento del f/q. Sabiendo que* *la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria asociada al tiempo de supervivencia futuro $T(x)$ viene dada por:*

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{5000} & \textit{para } 0 \leq t \leq 100 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

y que el tanto instantáneo de interés es del 10 %, se pide calcular la prima única neta para individuos de edades: 20, 50, 75 años.

Solución

$$\text{Prima única} = 50 \int_0^{100-x} v^t \, \frac{t}{5000} \, dt = 50 \left(\frac{1}{5000} \right) \int_0^{100-x} v^t \; t \; dt$$

$$\text{Integramos por partes} \int u \; dv = uv - \int v \; du$$

$$\begin{aligned} u &= t & du &= dt \\ dv &= v^t & v &= \frac{v^t}{\ln v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{100} \left[t \frac{v^t}{\ln v} - \int_0^{100-x} \frac{v^t}{\ln v} \, dt \right] \\ &= \frac{1}{100} \left[t \frac{v^t}{\ln v} - \frac{v^t}{(\ln v)^2} \Bigg|_0^{100-x} \right] \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}1}$$

$$\Rightarrow \text{Prima única } \frac{1}{100} \left[\frac{(100-x) \; v^{100-x}}{\ln v} - \frac{v^{100-x}}{\left(\ln v \right)^2} + \frac{1}{\left(\ln v \right)^2} \right]$$

Edad x	**Prima Única Pura**
20	$1,0962$
50	$1,04677$
75	$0,757137$

Problema 3.7 *Disponiendo de la siguiente información:* $A_{76} = 0,8$; $D_{76} = 400$; $D_{77} = 360$; $i = 0,03$. *Se pide calcular el valor de* A_{77}.

Solución

$$\begin{aligned}
A_x &= \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{t+1}\ {}_{t/}q_x \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{t+1}\ {}_{t}p_x\ q_{x+t} \\
&= \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x\ \sum_{t=1}^{\infty} \upsilon^{t}\ {}_{t-1}p_{x+1}\ q_{x+t} \\
&= \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x\ \sum_{r=0}^{\infty} \upsilon^{r+1}\ {}_{r}p_{x+1}\ q_{x+r+1} \\
&= \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x + \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{t+1}\ {}_{t}p_{x+1}\ q_{t+(x+1)} \\
&= \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x\ A_{x+1} \\
&= \upsilon\ q_{76} + \upsilon\ p_{76}\ A_{77} \\
A_{76} &= \upsilon\ q_{76} + \upsilon\ p_{76}\ \frac{M_{77}}{D_{77}}
\end{aligned}$$

$$\upsilon = \frac{1}{1{,}03}$$

$$D_{76} = \upsilon^{76}\ l_{76} \quad ; \quad l_{76} = 3781{,}71 \quad ; \quad q_{76} = 0{,}073$$

$$D_{77} = \upsilon^{77}\ l_{77} \quad ; \quad l_{77} = 3505{,}65 \quad ; \quad q_{77} = 0{,}927$$

$$A_{77} = 0{,}810$$

Problema 3.8 *Si se conoce que para todo valor entero de x el valor de $A_x = 0{,}4$ y que $i = 0{,}06$, se pide calcular la varianza de la variable aleatoria asociada a la prestación de 1 u.m. de una operación de seguros vida entera en el campo discontinuo a favor de (30).*

Solución

$$\begin{aligned}
A_x &= \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{t+1}\ {}_{t/}q_x \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{t+1}\ {}_{t}p_x\ q_{x+t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_x &= \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x \sum_{t=1}^{\infty} \upsilon^t\ {}_{t-1}p_{x+1}\ q_{x+t} \\
&= \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x \sum_{r=0}^{\infty} \upsilon^{r+1}\ {}_{r}p_{x+1}\ q_{x+r+1} \\
A_x &= \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x\ A_{x+1} \qquad ; \qquad \upsilon = 1/(1+i)
\end{aligned}$$

Como $A_x = 0{,}4$ para todo valor entero de $x \Rightarrow A_x = A_{x+1}$

$$\begin{aligned}
A_x &= \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x\ A_x \\
A_x &= \frac{\upsilon\ q_x}{1-\upsilon\ p_x} \\
&= \frac{q_x}{(1+i)-p_x} \\
0{,}4 &= \frac{q_x}{(1+0{,}06)-(1-p_x)} \\
q_x &= 0{,}04
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^2A_x &= \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{2(t+1)}\ {}_{t/}q_x \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{2(t+1)}\ {}_{t}p_x\ q_{x+t} \\
&= \upsilon^2\ q_x + \upsilon^2\ p_x \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{2(t+1)}\ {}_{r}p_{x+1}\ q_{x+t+r} \\
{}^2A_x &= \upsilon^2\ q_x + \upsilon^2\ p_x\ {}^2A_{x+1} \qquad ; \qquad \upsilon 1/(1+i)
\end{aligned}$$

Por lo ya expuesto anteriormente $\Rightarrow\ {}^2A_x =\ {}^2A_{x+1}$

$$\begin{aligned}
{}^2A_x &= \upsilon^2\ q_x + \upsilon^2\ p_x\ {}^2A_x \\
&= \frac{\upsilon^2\ q_x}{1-\upsilon^2\ p_x} \\
{}^2A_x &= \frac{q_x}{(1+i)^2-p_x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(\lambda) &= {}^2A_x - A_x^2 \\
&= \frac{q_x}{(1+i)^2 - p_x} - A_x^2 \\
&= {}^2A_x - p_x \\
&= \left(\frac{0{,}04}{(1{,}06)^2 - 0{,}96}\right) - (0{,}4)^2 \\
Var(\lambda) &= 0{,}0845
\end{aligned}
$$

Entonces la varianza de la prestación pedida para 1 u.m. es igual a 0,0845

Problema 3.9 *Obtener una expresión en términos de l_x, M_x y D_x para la prima única pura correspondiente a un individuo de edad x que contrata un seguro de* \$20,000 *pagadero al final de los 10 años desde la realización del contrato si el f/q ocurre durante este período o al final del año del f/q si esto sucede después de transcurridos los 10 años.*

Solución

$$
\xi = \begin{cases} \upsilon^{10} & \text{probabilidad } {}_{10}q_x \\ \upsilon^{t+1} & \text{probabilidad } {}_{t/}q_x, \ t = 10{,}11, 12, \ldots \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\xi) &= \upsilon^{10}\ {}_{10}q_x + \sum_{k=10}^{\infty} \upsilon^{t+1}\ {}_{t/}q_x \\
&= \upsilon^{10}\ {}_{10}q_x + {}_{10/}A_x \\
\text{Prima} &= 20000\left(\upsilon^{10}\ {}_{10}q_x + \frac{M_{10+x}}{D_x}\right) \\
&= 20000\left(\upsilon^{10}\ \frac{l_x - l_{x+10}}{l_x} + \frac{M_{10+x}}{D_x}\right)
\end{aligned}
$$

Problema 3.10 *Demostrar que:*

$$
A_x = \upsilon\ q_x + \upsilon\ p_x\ A_{x+1}
$$

Solución

$$
\begin{aligned}
A_x &= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \ {}_tp_x \ q_{x+t} \\
&= v \ {}_0p_x \ q_x + v \sum_{t=1}^{\infty} v^t \ {}_tp_x \ q_{x+t} \quad ; \quad {}_tp_x = 1 \ p_{x(t-1)} \ p_{x+1} \ , \ {}_0p_x = 1 \\
&= v \ {}_0p_x \ q_x + v \sum_{t=1}^{\infty} v^t \ p_x \ {}_{t-1}p_{x+1} \ q_{x+t} \\
&= v \ q_x + v \ p_x \ \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \ {}_tp_{x+1} \ q_{x+t+1} \\
A_x &= v \ q_x + v \ p_x \ A_{x+1}
\end{aligned}
$$

Problema 3.11 *Sabiendo que un colectivo tiene una ley de sobrevivencia* $l_x = 100 - x$ *para* $0 \leq x \leq 100$ *y que el tanto instantáneo de interés es* $\delta = 0{,}05$ *se pide calcular:*

1) El valor de $\overline{A}_{40:\overline{25|}}$

Solución

$$
\begin{aligned}
\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^n v^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt \\
&= \int_0^n e^{-\delta} \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt \\
\overline{A}^{1}_{40:\overline{25|}} &= \int_0^{25} e^{-0{,}05 \ t} \ \frac{60-t}{60} \ \frac{1}{60-t} \ dt \\
&= \frac{1}{60} \ \frac{e^{-0{,}05 \ t}}{-0{,}05}\Bigg|_0^{25} \\
&= 0{,}238 \\
\overline{A}_{40:\overset{1}{\overline{25|}}} &= v^{25} \ {}_{25}p_{40} \\
&= \frac{100-25-40}{100-40} \ v^{25} \\
&= 0{,}167
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \overline{A}_{40:\overline{25|}} = 0{,}237 + 0{,}167 = 0{,}4014
$$

2) La prima única neta para una operación de seguros temporal por 25 años con una prestación al f/q en el momento t de $e^{0{,}005\ t}$ a favor de (40)

Solución

$$z = \begin{cases} e^{0{,}005\ t}\ \upsilon^t & \text{con densidad } {}_tp_{40}\ \mu_{40+t} \quad 0 \leq t \leq 25 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi = E(z) &= \int_0^{25} e^{0{,}005\ t}\ \upsilon^t\ {}_tp_{40}\ \mu_{40+t}\ dt \\ &= \int_0^{25} e^{0{,}005\ t}\ e^{-0{,}005\ t}\ {}_tp_{40}\ \mu_{40+t}\ dt \\ &= \int_0^{25} \frac{100-40-t}{100-40}\ \frac{1}{100-40-t}\ dt \\ &= 0{,}416 \end{aligned}$$

Problema 3.12 *Interpretar y expresar en símbolos de conmutación las siguientes funciones:*

1) $A_{30:\overline{15|}}^{\;1}$

Solución

$$A_{30:\overline{15|}}^{\;1} = \frac{M_{30} - M_{45}}{D_{30}}$$

2) ${}_{10/20}A_{30}$

Solución

$${}_{10/20}A_{30} = \frac{M_{30} - M_{60}}{D_{30}}$$

3) ${}_{10/}A_{30}$

Solución

$${}_{10/}A_{30} = \frac{M_{40}}{D_{30}}$$

4) ${}_{10/20}(IA)_{30}$

Solución

$$ {}_{10/20}(IA)_{30} = \frac{R_{40} - R_{60} - (20)M_{60}}{D_{30}} $$

Problema 3.13 *Se concierta una operación de seguros a favor de (x) que proporciona las siguientes prestaciones: 10.000 u.m. al final de los 20 años si (x) sobrevive y reembolso de la prima única π al final del año de f/q si (x) f/q durante los 20 primeros años.*

Solución

$$
\begin{aligned}
\pi &= 10000\ A_{x:\overline{20|}}^{\ \ 1} + \pi\ A^{1}_{x:\overline{20|}} \\
&= \frac{10000\ \frac{D_{x+20}}{D_x}}{\pi\ \frac{M_x - M_{x+20}}{D_x}} \\
\pi &= \frac{10000\ D_{x+20}}{D_x - M_x + M_{x+20}}
\end{aligned}
$$

Problema 3.14 *Una determinada empresa que lleva funcionando 50 años concierta una operación de seguros vida entera con una prestación de 100.000 u.m., siendo la ley de sobrevivencia del sector empresarial dada por $l_x = (1{,}000)(1 - x/105)$ y el tanto de interés $i = 0,08$, se pide calcular la prima única de esta operación.*

Solución

$$
\begin{aligned}
l_x &= 1000\left(1 - \frac{x}{105}\right) \\
l_{x+t} &= 1000\left(1 - \frac{x+t}{105}\right) \\
l'_{x+t} &= -\frac{1000}{105} \\
{}_tp_x &= \frac{105 - x - t}{105 - x} \\
\mu_{x+t} &= \frac{1}{105 - x - t} \\
{}_tp_x\ \mu_{x+t} &= \frac{1}{105 - x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi &= -\frac{100000}{(55)(0{,}07696)} \int_0^\infty e^{-0{,}07696\ t} - 0{,}07696\ dt \\
&= 23625{,}0236
\end{aligned}
$$

3.9. Problemas propuestos

1. Para (40) calcular la prima única pura de un seguro temporal contratado a 10 años que paga \$10,000 si el f/q ocurre dentro del primer año, \$9,000 si ocurre durante el segundo año, y así sucesivamente. Utilizar $i = 10\,\%$ anual.
   SE PIDE:
   - Cuando la cobertura termina en el fin del décimo año
   - Cuando la cobertura termina al finalizar el quinto año

2. Asumiendo que la mortalidad de una población sigue una ley de Moivre con edad límite de 100 años, e $i = 10\,\%$.
   SE PIDE:
   - Calcular $\overline{A}^{1}_{30:\overline{10}|}$
   - Calcular el riesgo (varianza) del valor presente de la indemnización.

3. Sabiendo que un colectivo sigue la ley Moivre y que el tanto instantáneo de interés que rige en el mercado de capital i es constante.
   SE PIDE:
   - Determinar en términos de los parámetros de la ley de Moivre e interpretar L_x y m_x

4. Calcule para una persona de 50 años, la prima única pura que deberá cancelar para tener un seguro decreciente anualmente, que paga 5000 dólares en el momento del fallecimiento si este ocurre en el primer año, 4000 en el segundo año, y así sucesivamente. Se conoce que los fallecimientos tienen distribución uniforme durante el año de fallecimiento, que $i = 0{,}06$ y $l_{50} = 89509$, además de la tabla de valores siguiente:

K	D_{50+k}
0	529,8844
1	571,4316
2	616,4165
3	665,0646
4	717,6041

5. Si se conoce que la mortalidad sigue una ley de Moivre con edad límite de 100 años.
   SE PIDE:
   - Hallar $(\overline{IA})^1_{55:\overline{5}|}$
6. Siendo t el tiempo de vida futuro, pagadera al final del año del f/q.
   SE PIDE:
   - Hallar en símbolos de conmutación el valor actuarial de una operación de seguros de vida completa que proporciona prestaciones crecientes según la función $\phi(t) = at + b$;
7. Considerar un seguro de vida completo diferido a 5 años, pagadero al momento de fallecimiento de (x). El individuo está sujeto a una fuerza de mortalidad constante $\mu = 0{,}004$. Si la fuerza del interés $\delta = 0{,}01$. Para una indemnización de 1 u.m.
   SE PIDE:
   - El valor esperado
   - La varianza
   - La mediana $\xi_{0,5}$
8. Se establece una póliza de seguro emitida para una persona recién nacida con la siguiente escala de beneficios por fallecimiento, pagaderas al momento del f/q:

Edad	Indemnización
0	1000
1	2000
2	4000
3	6000
4	8000
$5-20$	10000
21 o más	50000

SE PIDE:

- Determinar el monto de la prima única pura en términos de los símbolos de conmutación
- Usando la tabla de mortalidad de la población mostrada en el apéndice y una tasa aplicable de $i = 10\,\%$ hallar el monto de la prima única pura

9. Una política de seguros, cuya indemnización es pagadera al momento del f/q establece un pago de k u.m. si el f/q ocurre dentro de primer año, de $k-1$ u.m. si el fallecimiento ocurre durante el segundo año, $k-2$ u.m. si ocurre el tercer año,... , de $k-(n-2)$ u.m. si el fallecimiento ocurre durante el año $n-1$.
SE PIDE:
   - El valor actual de este seguro decreciente con vigencia a n años $(D\overline{\xi})^1_{x:\overline{n}|}$
   - El valor actuarial $(D\overline{A})^1_{x:\overline{n}|}$

10. Una persona de 30 años contrata un seguro con vigencia a 10 años pagadero de 10,000 dólares si el f/q ocurre dentro del primer año, 9,000 dólares si ocurre durante el segundo año, y así sucesivamente, con una tasa aplicable del 15 %.
SE PIDE:

- Hallar el monto de la prima única pura

- El riesgo de esta póliza, es decir la varianza del valor actual de la indemnización

11. Determinar en términos de los símbolos de conmutación R y D el valor actuarial de una operación de seguros de vida entera que proporciona 1 u.m. de forma creciente durante los primeros n años y luego permanece constante igual a n hasta el fallecimiento, notada con $(I_n A)_x$

12. Considere una operación de seguros con la siguiente prestación:

    a) Un capital variable en progresión aritmética que comienza con 4 millones de sucres y razón de 200,000 sucres pagadero en el momento del f/q a favor de una persona de 35 años si el suceso acaece antes que ésta cumpla los 50 años.

    b) Bajo las mismas hipótesis de f/q dentro de (35) hasta antes que cumpla los 50 años, determinar el capital constante pagadero tal que el valor actuarial de este último sea igual al del seguro variable en progresión aritmética.

13. Supóngase que una compañía de seguros incurre en gastos de expedición que pueden estimarse en un 80 % del valor de la prima, y en el momento de liquidar y pagar la indemnización hay gastos administrativos que se estiman en el 1 % del valor pagado.
    SE PIDE:

    - Escribir una ecuación que permita calcular el monto de la prima de un seguro de vida completo que contemple estos gastos.

    - Calcular el monto que debe pagar una persona de 42 años para tener acceso a este seguro ($i = 10\,\%$).

14. Si se conoce que la función de sobrevivencia de un colectivo de personas está dado por:

$$S(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 ; \text{para } x \geq 0$$

SE PIDE:

- Hallar el valor exacto de un seguro contratado por una persona de 25, temporal a 15 años a una tasa de interés del 10 % pagadera el momento del f/q.

15. Cuál es la prima única pura y el riesgo de un seguro de vida completo de 1 u.m. para una persona de 40 años:

    a) Si es pagadera al final del año del f/q.

    b) Si es pagadera el momento del f/q.

    c) Si se considera que la una unidad monetaria se paga en la mitad del año del f/q.

16. Considere un seguro de vida completo para un individuo de x años, el capital asegurado es de C unidades monetarias pagaderas al final del año del fallecimiento; la prima neta anual anticipada es π; si $i = 10\,\%$ y la mortalidad sigue una ley de Moivre con edad límite $\omega = 100$.
    SE PIDE:

    - Hallar la esperanza de vida completa de (x).

    - Hallar el valor de π en función de C y de x.

17. Una persona de edad (40) contrata un seguro que consiste en el pago de 100 u.m. si el f/q ocurre dentro de los primeros 10 años, pagaderas al final del año del f/q o de 200 unidades monetarias pagaderas al final del año del f/q si este ocurre luego de 10 años. Si la tasa de interés es de $i = 5\,\%$

    a) Con la tabla de mortalidad.

    b) Si la población sigue la ley de Moivre con edad límite de 100 años.

    c) Con fuerza de mortalidad constante $\mu_x = 2$.

d) Con distribución de Weibull con parámetro $k = 2$. (Una ley de mortalidad se dice de Weibull si tiene fuerza de mortalidad: $\mu_x = kx^n$).

18. Considerar un seguro diferido a 5 años de 1 u.m. pagadera al momento del f/q de (x). La persona está sujeta a una fuerza constante de mortalidad $\mu = 0{,}04$; si $\delta = 0{,}10$.
    SE PIDE:
    - Calcular el valor actuarial.
    - Calcular la varianza y la mediana $\xi_{0,5}$.

19. Si $l_x = 100 - x$ para $0 \leq x \leq 100$ y $\delta = 0{,}05$.
    SE PIDE:
    - Calcular $\overline{A^1}_{40:\overline{25}|}$

20. Sabiendo que se verifican las siguientes igualdades:
    - $A_{x:\overline{n}|} = u$
    - $A^1_{x:\overline{n}|} = y$
    - $A_{x+n} = z$

    SE PIDE:
    - Hallar A_x en función de u, y, z

21. Se concierta una operación de seguros que proporciona las siguientes prestaciones: 10,000 u.m. al final de los 20 años si (x) sobrevive a esa edad, o el reembolso de la prima única pura pagada por el asegurado sin intereses al final del f/q, si este ocurre antes de 20 años.
    SE PIDE:
    - Calcular el monto de la prima única pura en términos de los símbolos de conmutación D_x y M_x.

22. Demostrar que:

- $R_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)\ C_{x+t}$
- $\sum_{t=0}^{n-1} (n-t)\ {}_{t/1}A_x = \sum_{t=1}^{n} A^1_{x:\overline{n}|}$
- $\overline{A}_x = \dfrac{1}{{}_xp_0\ \upsilon^x} \displaystyle\int_x^{+\infty} \upsilon^y\ {}_yp_0\ \mu_y\ dy$

Capítulo 4

Valores actuariales de las prestaciones en casos de supervivencia

4.1. Introducción

En este capítulo se tratan las denominadas prestaciones para el caso de supervivencia, en las cuales, los valores actuariales de las indemnizaciones pactadas representan situaciones en las cuales no hay fallecimiento. En el caso determinístico lo equivalente serían los valores actuales de rentas periódicas, que también son denominadas en la literatura como *anualidades ciertas*, su definición y los principales tipos de las mismas se muestran a continuación:

4.1.1. Definición

Se denomina anualidad cierta al valor actual de una sucesión de pagos que se realizan periódicamente durante una determinada cantidad de tiempo (conocido). Las más importantes son:

Anualidad anticipada: (i.e. el primer pago comienza en el instante cero) Constituye una sucesión de n pagos periódicos anuales de 1 u.m.. Su valor actual, representado con:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \\
\Rightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|} &= \frac{1 - v^n}{1 - v}
\end{aligned}$$

Anualidad vencida: (i.e. el primer pago se realiza al final del 1er año) Constituye una sucesión de n pagos anuales del 1 u.m.. Su valor actual se representa con:

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= \upsilon + \upsilon^2 + \ldots + \upsilon^n \\ &= \upsilon\ \ddot{a}_{n\neg} \\ &= \upsilon\ \frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon} \\ a_{\overline{n}|} &= \frac{1-\upsilon^n}{i} \end{aligned}$$

Anualidad anticipada pagadera en m fracciones del año : En este caso la sucesión de pagos se realiza al inicio de cada m fracción del año.

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-\upsilon^n}{d^{(m)}}$$

Anualidad vencida pagadera en m fracciones del año : Similar a la anterior, con la única diferencia que los pagos se realizan al finalizar cada m fracción del año.

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-\upsilon^n}{i^{(m)}}$$

Anualidad creciente anticipada (con parámetros q y n)

$$\left(I^{(q)}\ddot{a}\right)^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}\ (q) - n\ \upsilon^n}{d^{(m)}}$$

Anualidad creciente vencida

$$\left(I^{(q)}\ a\right)^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}\ (q) - n\ \upsilon^n}{i^{(m)}}$$

4.2. Valor actuarial del capital diferido para casos de supervivencia

Recordemos la variable aleatoria analizada anteriormente en 3.3.4

$$\xi_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = {}_n\xi_x = \begin{cases} \upsilon^n & ; \text{con probabilidad } {}_np_x \\ 0 & ; \text{con probabilidad } {}_nq_x \end{cases}$$

Con su valor actuarial:

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} &= E({}_n\xi_x) \\ &= \upsilon^n \; {}_np_x \end{aligned}$$

Este valor actuarial también suele representarse como ${}_nE_x$, que en particular es la notación que se usará en este capítulo.

Luego

$${}_nE_x = {}_np_x \; \upsilon^n$$

- ${}_nE_x$ se denomina *factor de actuarialización*, y es el equivalente actuarial del valor υ^n, que se denomina *factor de actualización financiera*

- De manera similar, se define el *factor de capitalización actuarial* por:
$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{(1+i)^n}{{}_np_x}$$
que es el análogo actuarial del factor de capitalización financiera $\upsilon^{-n} = (1+i)^n$.

4.3. Equivalencia entre el problema financiero y el actuarial

Como $\delta = \ln(1+i)$:

$$\begin{aligned} {}_nE_x &= e^{-n\,\delta} \; {}_np_x \quad ; \quad n\,\delta = \int_x^{x+n} \delta \; dt \\ {}_np_x &= e^{-\int_0^n \mu_{x+t} \; dt} \\ &= e^{-\int_x^{x+n} \mu_t \; dt} \\ {}_nE_x &= e^{-\int_x^{x+n} \mu_t \; dt} \; e^{-\int_x^{x+n} \delta \; dt} \\ \Rightarrow {}_nE_x &= e^{-\int_x^{x+n} (\mu_t + \delta) \; dt} \end{aligned}$$

Ahora:

$$\upsilon^n = e^{-\int_x^{x+n} \delta \; dt}$$

Así, el problema financiero es equivalente al problema actuarial si se considera la probabilidad de supervivencia 1, o equivalentemente una fuerza de mortalidad μ_t cero.

Teorema 4.1 *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- ${}_nE_x \leq v^n$, *es decir el factor de actuarialización es menor que el factor de actualización.*

- *El factor de capitalización actuarial, en cambio, es mayor o igual al factor de capitalización financiera.*

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \frac{1}{{}_nE_x} &= e^{\int_x^{x+n}(\delta+\mu_x)\ dx} \\ \frac{1}{{}_nE_x} &\geq (1+i)^n \ \blacksquare \end{aligned}$$

4.4. Rentas de sobrevivencia vitalicias constantes

Una renta vitalicia es una sucesión de pagos que se realizan de manera constante mientras el sujeto viva o se cumplan las estipulaciones del contrato. Se denominan prepagables o anticipadas si el pago se realiza al inicio de cada período y se denominan post pagables o vencidas cuando los pagos se realizan al final de cada período.

4.4.1. Renta vitalicia, anual, unitaria, inmediata, anticipada y temporal por n años

En este caso se trata de una sucesión de pagos anuales de 1 u.m., pagaderos al inicio de cada año por n años o hasta que fallezca, lo que suceda primero.

El valor actual de la sucesión de los pagos es representado con:

$$\ddot{\alpha}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t}|} & ;\text{con probabilidad } {}_{t-1/}q_x \qquad t = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & ;\text{con probabilidad } {}_{n-1}p_x \end{cases}$$

Y su valor actuarial sería:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t-1/}q_x \; \ddot{a}_{\overline{t}|} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \; {}_{n-1}p_x$$

Ahora bien, en la práctica el valor de $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ se puede expresar fácilmente en términos de los símbolos de conmutación de la siguiente manera:

Como ${}_t\xi_x$ es el valor actual del pago de 1 u.m. si el individuo de edad x sobrevive a la edad $x+t$, entonces:

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}_{x:\overline{n}|} &= {}_0\xi_x + {}_1\xi_x + \ldots + {}_{n-1}\xi_x \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} {}_t\xi_x
\end{aligned}$$

Y así, el valor actuarial sería:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E(\ddot{\alpha}_{x:\overline{n}|}) \\
&= E\left(\sum_{t=0}^{n-1} {}_t\xi_x\right) \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} E({}_t\xi_x) \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x \\
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x}
\end{aligned}$$

Y así,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

4.4.2. Renta vitalicia, anual, unitaria, anticipada de vida completa

En este caso se trata de una sucesión periódica de pagos anuales, al inicio de cada año, mientras el asegurado viva.

El valor actual de los pagos se representa con $\ddot{\alpha}_x$ y es igual a:

$$\ddot{\alpha}_x = \ddot{a}_{\overline{t}|} \quad \text{con probabilidad} \quad {}_{t-1/}q_x; \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Y así, su valor actuarial es:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{t=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{t}|}\ {}_{t-1}q_x \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_t\xi_x \end{aligned}$$

En términos de los símbolos de conmutación:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E(\ddot{\alpha}_x) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} \\ \ddot{a}_x &= \frac{N_x}{D_x} \end{aligned}$$

4.4.3. Renta vitalicia, anual, unitaria, anticipada, prepagable, temporal por m años, diferida por n años

Esta renta en cambio representa una sucesión de pagos anuales que se realizan a partir del n-ésimo año de la firma del contrato y por m años más o hasta que el individuo fallezca, lo que suceda primero.

Su valor actual se representa con:

$$_{n/m}\ddot{\alpha}_x$$

Y su valor actuarial:

$$\begin{aligned} {}_{n/m}\ddot{a}_x &= \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_tE_x \\ &= \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} \end{aligned}$$

$$
{}_{n/m}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}
$$

4.4.4. Renta anual, unitaria, prepagable, ilimitada diferida por n años

En este caso se trata de una sucesión de pagos al inicio de cada año, pagaderas a partir del año n luego de la firma del contrato, mientras el individuo sobreviva.

Su valor actual se representa con:

$$
{}_{n/}\ddot{\alpha}_x
$$

Y su valor actuarial:

$$
\begin{aligned}
{}_{n/}\ddot{a}_x &= \sum_{t=n}^{\infty} {}_tE_x \\
&= \sum_{t=n}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} \\
{}_{n/}\ddot{a}_x &= \frac{N_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

A continuación se analizan las rentas en el caso vencido. La interpretación en cada caso, es la misma que en el caso anticipado (o prepagable) con la única diferencia que los pagos se realizan al final de cada año (y no al inicio).

4.4.5. Renta anual, unitaria, vencida ilimitada inmediata

Su valor actual se representa con:

$$
\alpha_x
$$

Y su valor actuarial es:

$$
\begin{aligned}
a_x &= \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x}
\end{aligned}
$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

4.4.6. Renta anual, unitaria, vencida, temporal por n años inmediata

Su valor actual se representa con:

$$_{n/m}\alpha_x$$

Y su valor actuarial es:

$$\begin{aligned} _{n/m}a_x &= \sum_{t=n+1}^{n+m} {}_tE_x \\ &= \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} \end{aligned}$$

4.4.7. Renta anual, unitaria, vencida, ilimitada, diferida por n años

Su valor actual es:

$$_{n/}\alpha_x$$

Y su valor actuarial es:

$$\begin{aligned} _{n/}a_x &= \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tE_x \\ &= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

Teorema 4.2 *En general, se satisfacen las siguientes relaciones entre los valores actuariales de las principales rentas estudiadas:*

i) $_{n/}a_x = a_x + a_{x:\overline{n}|}$

ii) $_{n/}a_x = {}_nE_x \; a_{x+n}$

iii) $\ddot{a}_x = 1 + a_x$

---

iv) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$

v) ${}_{n/}\ddot{a}_x = {}_{n-1/}a_x$

vi) ${}_{n/m}\ddot{a}_x = {}_{n-1/m}a_x$

DEMOSTRACIÓN

i) ${}_{n/}a_x = a_x + a_{x:\overline{n}|}$

$$\begin{aligned} a_x + a_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} = {}_{n/}a_x \end{aligned}$$

ii) ${}_{n/}a_x = {}_nE_x \; a_{x+n}$

$$\begin{aligned} {}_nE_x \; a_{x+n} &= v^n \; {}_np_x \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_{x+n} \\ &= v^n \; {}_np_x \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_tp_{x+n} \\ {}_nE_x \; a_{x+n} &= \sum_{t=1}^{\infty} v^{t+n} \; {}_tp_{x+n} \; {}_np_x \end{aligned}$$

Cambiando el índice $t = T - n$

$$\begin{aligned} {}_nE_x \; a_{x+n} &= \sum_{T=n+1}^{\infty} v^T \; {}_{T-n}p_{x+n} \; {}_np_x \\ &= \sum_{T=n+1}^{\infty} v^T \; \frac{l_{x+T}}{l_{x+n}} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= \sum_{T=n+1}^{\infty} v^T \; {}_Tp_x \\ &= \sum_{T=n+1}^{\infty} {}_TE_x \\ {}_nE_x \; a_{x+n} &= {}_{n/}a_x \end{aligned}$$

iii) $\ddot{a}_x = 1 + a_x$

$$\begin{aligned} 1 + a_x &= 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} \\ &= \frac{D_x - N_{x+1}}{D_x} \\ 1 + a_x &= \frac{N_x}{D_x} \end{aligned}$$

iv) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$

$$\begin{aligned} 1 + a_{x:\overline{n-1}|} &= \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} \\ 1 + a_{x:\overline{n-1}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

v) ${}_{n/}\ddot{a}_x = {}_{n-1/}a_x$

$$\begin{aligned} {}_{n/}\ddot{a}_x &= \frac{N_{x+n}}{D_x} \\ &= {}_{n-1/}a_x \end{aligned}$$

vi) ${}_{n/m}\ddot{a}_x = {}_{n-1/m}a_x$

$$\begin{aligned} {}_{n/m}\ddot{a}_x &= \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x} \\ &= {}_{n-1/m}a_x \ \blacksquare \end{aligned}$$

4.5. Capitalización actuarial

Si cada elemento (x) de un colectivo/sector realiza un pago de 1 u.m. a un determinado fondo al final de cada año si sobrevive, y estos pagos se capitalizan en el fondo hasta el final de n años, la parte correspondiente a cada sobreviviente al final de los n años se representa con $S_{x:\overline{n}|}$

Por tanto el valor actuarial del monto al final del plazo de los n años de sobrevivencia, unitario, vencido, pagadero mientras x sobrevive se podría calcular así:

El primer pago realizado a la edad $(x+1)$ se convierte luego de n años en:

$$\frac{1}{{}_{n-1}E_{x+1}}$$

El segundo pago realizado a la edad $(x+2)$ (si sobrevive) se convierte en:

$$\frac{1}{{}_{n-2}E_{x+2}}$$

y así sucesivamente hasta el último pago.

De esta manera el monto actuarial para cada sobreviviente a la edad $x+n$ viene dado por:

$$\begin{aligned} S_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}} \\ &= \frac{1}{D_{x+n}} \left(D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}\right) \\ \Rightarrow S_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \end{aligned}$$

Teorema 4.3 *Se satisface la siguiente relación*

$$S_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} \frac{1}{{}_nE_x}$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} \frac{1}{{}_nE_x} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \left(\frac{D_x}{D_{x+n}}\right) \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVACIONES
El monto actuarial acumulado anticipado es:

$$\begin{aligned} \ddot{S}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \frac{1}{{}_{n}E_x} \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} \\ \ddot{S}_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \end{aligned}$$

4.6. Valores actuariales de rentas vitalicias fraccionadas en m partes

Además de las rentas vitalicias pagaderas anualmente, también hay que considerar el caso en que estas no se pagan anualmente, sino mensualmente, trimestralmente, etc., de esta manera se tienen las denominadas rentas fraccionadas. Los principales se anuncian a continuación.

4.6.1. Valor actuarial de una renta fraccionada vitalicia (pagadera mientras sobrevive la persona) de 1/m u.m. al final de cada m-ésima fracción del año (vencida) inmediata

Usando la notación anterior, su valor actuarial es:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\left({}_{1/m}E_x + {}_{2/m}E_x + \ldots + {}_{m+1/m}E_x + \ldots \right)$$

Que se podría calcular como:

$$\begin{aligned} a_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\Big({}_{0+1/m}E_x + {}_{0+2/m}E_x + \ldots + {}_{0+m/m}E_x + \\ &\quad {}_{1+1/m}E_x + {}_{1+2/m}E_x + \ldots + {}_{1+m/m}E_x + \\ &\quad {}_{2+1/m}E_x + \ldots \Big) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{m} {}_{n+t/m}E_x \end{aligned}$$

Si usamos interpolación lineal para aproximar ${}_{n+t/m}E_x$, se tiene:

$${}_{n+t/m}E_x \cong {}_nE_x + \frac{t}{m}\left({}_{n+1}E_x - {}_nE_x \right)$$

$$\Rightarrow a_x^{(m)} \cong \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{m} {}_nE_x + \frac{t}{m}\left({}_{n+1}E_x - {}_nE_x \right)$$

$$\begin{aligned}
a_x^{(m)} &\cong \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\left(m\ {}_nE_x + \frac{{}_{n+1}E_x - {}_nE_x}{m}\ \frac{m(m+1)}{2} \right) \\
&\cong \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\left(m\ {}_nE_x + \frac{(m+1)}{2}\ {}_{n+1}E_x - \frac{m}{2}\ {}_nE_x - \frac{{}_nE_x}{2} \right) \\
&\cong \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+1)\ {}_{n+1}E_x + (m-1)\ {}_nE_x}{2} \\
&\cong \frac{1}{2m}\left((m+1)\sum_{n=0}^{\infty} {}_{n+1}E_x + (m-1)\sum_{n=0}^{\infty} {}_nE_x \right) \\
&\cong \frac{1}{2m}\left((m+1)\ a_x + (m-1)(1+a_x) \right) \\
&\cong \frac{1}{2m}\left(ma_x + a_x + m + ma_x - 1 - a_x \right) \\
a_x^{(m)} &\cong a_x + \frac{m-1}{2m}
\end{aligned}$$

Es decir la renta fraccionada es aproximadamente igual a la renta anual más un término de aproximación. Cabe indicar que el esquema de interpolación lineal usado es el más simple que se podría plantear; sería más preciso, pero a la vez más complejo llegar a un modelo que incluya mejores técnicas de interpolación, tales como interpolación por Splines o trazadores cúbicos, lo cual se analiza en 4.7.

También se puede llegar a resultados más precisos a través del desarrollo en diferencias finitas de las funciones consideradas, con lo cual se obtienen las denominadas Fórmulas de Woolhouse, analizadas en 4.8.

4.6.2. Valor actuarial de la renta diferida pagadera m veces por año de $1/m$ y vencida

Usando el procedimiento anterior y la aproximación por interpolación lineal indicada se llega a:

$$ {}_{n/}a_x^{(m)} \cong {}_{n/}a_x + \frac{m-1}{2m}\, {}_nE_x $$

4.6.3. Valor actuarial de la renta temporal por n períodos m veces al año vencida inmediata

Es obvio que:

$$ a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = a_x^{(m)} - {}_{n/}a_x^{(m)} $$

Así, usando las aproximaciones anteriores:

$$
\begin{aligned}
a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\cong \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} - {}_{n/}a_x - \frac{m-1}{2m}\, {}_nE_x \\
&\cong \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}\, \frac{D_{x+n}}{D_x} \\
&\cong \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \\
a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &\cong \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+n})}{D_x}
\end{aligned}
$$

A continuación se plantean los resultados para las rentas en el caso anticipado:

4.6.4. Renta vitalicia anticipada de pago de $1/m$ u.m. cada vez

Igual que en el caso vencido se pueden obtener las aproximaciones respectivas para el caso anticipado:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/m}E_x \\
&= \frac{1}{m} + \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/m}E_x \\
&= \frac{1}{m} + a_x^{(m)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ddot{a}_x^{(m)} &\simeq \frac{1}{m} + a_x + \frac{m-1}{2m}\\ &\simeq a_x + \frac{m+1}{2m}\\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\end{aligned}$$

En símbolos de conmutación:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \simeq \frac{N_{x+1} + \dfrac{m+1}{2m}\, D_x}{D_x}$$

4.6.5. Renta anticipada y diferida pagadera m veces al año

$$_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} \simeq \frac{N_{x+n} - \dfrac{m-1}{2m}\, D_{x+n}}{D_x}$$

4.6.6. Renta anticipada, temporal por n períodos y pagadera m veces al año

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \simeq \frac{N_x - N_{x+n} - \dfrac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+n})}{D_x}$$

4.6.7. Renta diferida por n años y temporal por k años anticipada y pagadera m veces al año

$$_{n/k}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \simeq \frac{N_{x+n} - N_{x+n+k} - \dfrac{m-1}{2m}\,(D_{x+n} - D_{x+n+k})}{D_x}$$

4.7. Uso de trazadores cúbicos en el análisis de rentas fraccionadas

Como se mostró antes, en la literatura actuarial en general, se han establecido los valores de las rentas fraccionadas a través de interpolación lineal segmentaria, con lo cual se realizan las aproximaciones respectivas de los símbolos de conmutación, que solo se conocen para edades enteras. Sin embargo, la aplicación de este tipo de interpolación, si bien es sencilla, tiene el inconveniente de que produce resultados un tanto imprecisos, y además lleva a situaciones como las de "no suavidad"de las funciones biométricas en las edades enteras. En la actualidad en Análisis Numérico se disponen de modernas técnicas de interpolación, tales como los trazadores cúbicos o Splines, las cuales han sido incorporadas en este texto al tratamiento de rentas fraccionadas, y que por tanto permiten obtener resultados mas precisos.

El inconveniente de usar estas técnicas de interpolación más sofisticadas es que en cambio ya no se puede establecer una expresión explícita para los valores de las rentas, y hay que implementar su cálculo en un programa informático. A continuación se determinan los valores que se obtienen de las primas fraccionadas, con la utilización de estos métodos.

4.7.1. Interpolación de trazadores cúbicos

Se conoce por el teorema de Weierstrass para funciones contínuas que se puede aproximar cualquier función contínua, con la precisión que se quiera, por medio de un polinomio en un intervalo cerrado. Sin embargo, la naturaleza oscilatoria de los polinomios de alto grado y la propiedad de que una fluctuación en una parte pequeña de intervalo puede ocasionar grandes oscilaciones en todo su dominio, limita su utilización o hace al resultado poco real en las aplicaciones prácticas.

Un procedimiento alterno consiste en dividir el intervalo en una serie de subintervalos, y en cada subintervalo construir un polinomio diferente de aproximación. A esta forma de aproximar por medio de funciones se le conoce como *aproximación polinómica segmentaria*.

La aproximación polinómica segmentaria más simple es la interpolación lineal segmentaria que consiste en unir una serie de puntos (datos):

$$\Big\{\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_1, f(x_1)\big), \ldots, \big(x_n, f(x_n)\big)\Big\}$$

mediante una serie de segmentos de rectas. Obsérvese que esto es lo que se hizo en 4.6.1 para hallar el valor actuarial de una renta fraccionada vitalicia.

La aproximación por funciones lineales ofrece una desventaja, no se tiene la seguridad de que haya diferenciabilidad en los extremos de los subintervalos, lo cual dentro de un contexto geométrico significa que la función interpolante no es "suave.[en] dichos puntos. A menudo las condiciones físicas y biológicas indican claramente que se requiere esa condición y que la función aproximada debe ser continuamente diferenciable.

Otro procedimiento consiste en emplear un polinomio fragmentario del tipo Hermite. Por ejemplo, si los valores de la función f y de f' se conocen en los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, podemos emplear un polinomio de Hermite de grado tres en cada uno de los subintervalos $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ para obtener una función continuamente diferenciable en el intervalo (x_0, x_n). Si queremos determinar el polinomio cúbico de Hermite apropiado en determinado intervalo, basta calcular $H_3(x)$ para ese intervalo. Puesto que los polinomios interpolantes de Lagrange necesarios para calcular H_3, son de primer grado, podemos hacer el cálculo sin gran dificultad. Sin embargo, para utilizar los polinomios fragmentarios de Hermite en la interpolación general, necesitamos conocer la derivada de la función que va a ser aproximada, lo cual, como en el caso de los símbolos de conmutación que solo se conocen para edades enteras, muchas veces no es posible.

La aproximación polinómica fragmentaria más común utiliza polinomios cúbicos entre cada par consecutivo de nodos y recibe el nombre de *interpolación de trazadores cúbicos*. Un polinomio cúbico general contiene cuatro constantes; así pues, el procedimiento del trazador cúbico ofrece suficiente flexibilidad para garantizar que el interpolante no sólo sea continuamente diferenciable en el intervalo, sino que además tenga una segunda derivada continua en el intervalo. Sin embargo, en la construcción del trazador cúbico no se supone que las derivadas del interpolante concuerdan con las de la función, ni siquiera en los nodos donde se conoce el valor de la función.

Definición 4.1 *Dada una función f definida en (a, b) y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ un* interpolante de trazador cúbico S *para f es una función que cumple con las condiciones siguientes:*

a) $$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & ; si\ x_0 \leq x < x_1 \\ S_1(x) & ; si\ x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & ; si\ x_{n-1} \leq x < x_n \end{cases}$$

Donde cada $S_j(x)$ es un polinomio cúbico

b) $S(x_j) = f(x_j)$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n$;

c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+l})$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

d) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

---

e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ *para cada* $j = 0, 1, \ldots, n-2$*;*

f) *Se satisface uno de los siguientes conjuntos de condiciones de frontera:*

i) $S"(x_0) = S"(x_n) = 0$ *(Frontera libre o natural)*

ii) $S'(x_0) = f(x_0)$ *y* $S'(x_n) = f''(x_n)$ *(Frontera sujeta)*

Aunque los trazadores cúbicos se definen con otras condiciones de frontera, las condiciones anteriores son suficientes en este caso. Cuando se presentan las condiciones de frontera libre, el trazador recibe el nombre de *trazador natural*, y su gráfica se aproxima a la forma que adoptaría una varilla larga y flexible si la hiciéramos pasar por los puntos (datos):

$$\Big\{\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_1, f(x_1)\big), \ldots, \big(x_n, f(x_n)\big)\Big\}$$

En términos generales, en las condiciones de frontera sujeta se logran aproximaciones más exactas ya que abarcan más información acerca de la función. Pero para que se cumpla este tipo de condición de frontera, se requiere tener los valores de la derivada en los extremos o bien una aproximación precisa de ellos.

Si queremos construir el interpolante del trazador cúbico de determinada función f, aplicamos las condiciones de la definición a los polinomios cúbicos.

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

Para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Puesto que los términos $(x_{j+1} - x_j$ se utilizarán varias veces en este desarrollo, conviene introducir la notación más simple.

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

Para cada $j = 0, 1, \ldots,\ n-1$. Si tambien definimos $a_n = f(x_n)$, entonces del sistema de ecuaciones:

$$h_j c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

Permite hallar los valores de los coeficientes c_j para cada j, donde $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Nótese que este sistema contiene solo $\big\{c_j\big\}_j^n = 0$, como incógnitas, ya que los valores de $\big\{h_j\big\}_{j=0}^{n-1}$ y de $\big\{a_j\big\}_{j=0}^n$ están dados por el espaciado de los nodos $\big\{x_j\big\}_{j=0}^n$ y los valores de f en estos.

Una vez que se conocen los valores de $\{c_j\}_j^n = 0$, se pueden encontrar el resto de las constantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1} = 0$ y de $\{d_j\}_{j=0}^{n-1} = 0$ a partir de las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
c_{j+1} &= c_j + 3\ d_j\ h_j \\
b_{j-1} &= \frac{1}{h_{j-1}}\ (a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}\ (2\ c_{j-1} + c_j)
\end{aligned}
$$

Con lo cual quedan determinados los polinomios cúbicos

$$\{S_j(x)\}_j^{n-1} = 0$$

4.7.2. Resultados numéricos:

Desarrollando e implementando el algoritmo se pueden establecer comparaciones ente el valor actuarial determinado con interpolaciones de trazadores cúbicos y el valor actuarial obtenido por el método clásico que usa interpoladores lineales segmentarios.

Por ejemplo, para el caso de una renta vitalicia de $1/m$ u.m. pagaderas al finalizar cada $1/m$ fracción del año, vencida e inmediata, con tasa de interés $i = 10\,\%$, $x = 35$ años, $m = 6$ (es decir pagos bimensua-les), los resultados son:

- $a_{35}^{(6)} = 9{,}8862$ con el uso del modelo que usa interpoladores de trazador cúbico.
- $a_{35}^{(6)} = 10{,}0528874$ con el uso del modelo que usa interpoladores lineales.

4.8. Fórmulas de Woolhouse

Se pueden obtener aproximaciones más precisas para las rentas fraccionadas a través de un desarrollo de las fórmulas en diferencias finitas, estas se denominan fórmulas de Woolhouse, y se construyen a partir de los siguientes operadores:

4.8.1. Operador siguiente

- Dada una sucesión $U_0, U_1, U_2, \ldots$, se denomina operador de avance θ, al operador:

$$\theta\ U_r = U_{r+1}$$

- Y de manera recursiva se define el operador de avance de orden n representado por θ^n al operador:

$$\theta^n\ U_r = \theta\big(\theta^{n-1}\ (U_r)\big) = U_{r+n}$$

Donde

$$\theta^0\ U_r = U_r$$

4.8.2. Operador diferencias finitas

- Dada una función $f(x)$ se denomina diferencia finita h al operador Δ definido por:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

- Para el caso de la sucesión $U_0, U_1, U_2, \ldots$ la diferencia finita se define por:

$$\Delta\ U_r = U_{r+1} - U_r$$

- Y se define al aperador de diferencias finitas de orden n de manera recursiva:

$$\Delta^n U_R = \Delta(\Delta^{n-1} U_r)$$

Donde $\Delta^0 U_r = U_r$

Propiedades:

Los operadores siguiente y de diferencias finita satisfacen las siguientes propiedades:

i) Linealidad

- $\theta(U_r + V_r) = \theta U_r + \theta V_r$
- $\Delta(U_r + V_r) = \Delta U_r + \Delta V_r$

ii) Actividad

- $\theta^p(\theta^q U_r) = \theta^{p+q} U_r$
- $\Delta^p(\Delta^q U_r) = \Delta^{p+q} U_r$

iii) Potenciación

- $\big(\theta^p\big)^q U_r = \theta^{p \cdot q} U_r$

- $\left(\Delta^{p}\right)^{q}U_r = \Delta^{p.q}U_r$

OBSERVACIONES

$$\begin{aligned} \Delta\ U_r &= U_{r+1} - U_r \\ &= \theta\ U_r - U_r \\ \Delta\ U_r &= (\theta - 1)\ U_r \end{aligned}$$

Por tanto la relación entre los operadores siguientes y de diferencias finitas está dada por:

$$\Delta = \theta - 1$$

Y en general para los operadores de orden n:

$$\Delta^n = (\theta - 1)^n$$

Utilizando la fórmula del binomio de Newton:

$$\Delta^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \theta^{n-i}$$

Luego:

$$\Delta^n U_r = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} U_{r+n+i}$$

También:

$$\begin{aligned} \theta &= \Delta + 1 \\ \theta^n &= (\Delta + 1)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^{n-i} \end{aligned}$$

4.8.3. Operador derivada

Representamos al operador derivada como:

$$D = \frac{d}{dx}$$

Sea $f(x)$ una función que admite desarrollo de Taylor en algún intervalo, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + h\ Df(x) + \frac{h^2}{2!}\ D^2 f(x) + \frac{h^3}{3!}\ D^3 f(x) + \ldots \\
&= \left(1 + h\ D + \frac{h^2}{2!}\ D^2 + \frac{h^3}{3!}\ D^3\right) f(x) \\
&= \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h\ D)^n}{n!}\right) f(x) \\
f(x+h) &\Rightarrow f(x+h) = e^{h\ D} f(x)
\end{aligned}$$

Utilizando el operador de avance:

$$\begin{aligned}
U_0 &= f(x) \\
U_1 &= f(x+h) \\
U_2 &= f(x+2h) \\
&\vdots \\
U_1 &= e^{h\ D} U_0 \\
\theta\ U_0 &= e^{h\ D} U_0 \\
\Delta + 1 &= e^{h\ D} \\
\Delta &= e^{h\ D} - 1
\end{aligned}$$

De donde, $\Delta = h\ D + \frac{h^2}{2!}\ D^2 + \frac{h^3}{3!} + \ldots$

En estas fórmulas h se denomina *incremento*, así con un incremento unitario: $\Delta + 1 = e^D$; y, con un incremento de $1/m$.

$$\delta + 1 = e^{\frac{1}{m}\ D}$$

4.8.4. Integral finita

Consideremos un intervalo (a, b) particionado uniformemente de la forma:

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(n-1)h,\ a+nh=b,\ h=\frac{b-a}{h}$$

Se define la *integral finita* de $f(x)$ en (a, b) a la suma:

$$\sum{}_a^b f(x) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f\big(a+(n-1)\big)$$

De esta manera si $F(x)$ es una función tal que $f(x) = \Delta\ F(x)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(a) &= \Delta\ F(a) = F(a+h) - F(a) \\
f(a+h) &= \Delta\ F(a+h) = F(a+2h) - F(a+h) \\
f(a+2h) &= \Delta\ F(a+2h) = F(a+3h) - F(a+2h) \\
&\vdots \\
f\big(a+(n-1)h\big) &= F(b) = F(a+3h) - F(a+2h)
\end{aligned}$$

Así, si sumamos las ecuaciones anteriores obtendremos:

$$f(a) + f(a+h) + \ldots + f\big(a+(n-1)h\big) = F(b) - F(a)$$

Y con la notación anterior:

$$\sum{}_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

Donde la función $F(x)$ se denomina *primitiva* o *antiderivada* finita de $f(x)$.

Con la notación:

$$\begin{aligned}
D &: \quad \text{diferencia } \textit{unitaria} \\
d &: \quad \text{diferencia } 1/m\text{-ésima}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum \mu_{x+t} &= \sum_{t=a}^{b-1} \quad \text{Suma a intervalos unitarios en } (a, b) \\
\sum {}^{(m)}\mu_{x+t} &= \sum_{t=a}^{b-1/m} \frac{1}{m}\ \mu_{x+t}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$(1+\Delta) = (1+\delta)m = e^D$$

$$\Delta = e^D - 1$$

Como la integral finita $\sum$ es el operador *inverso* a Δ

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum &= \frac{1}{\Delta} \\
&= \frac{1}{e^D - 1} \\
&= \frac{1}{\left(1 + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots\right) - 1} \\
&= \frac{1}{D\left(1 + \frac{D}{2!} + \frac{D}{3!} + \dots\right)} \\
&= \frac{1}{D} \cdot \left(1 - \left(\frac{D}{2} + \frac{D^2}{6} + \frac{D^3}{24} + \dots\right) + \right. \\
&\quad \left(\frac{D^2}{4} + \frac{D^4}{36} + \frac{D^6}{576} + \dots\right) - \\
&\quad \left.\left(\frac{D^3}{8} + \frac{D^6}{216} + \frac{D^9}{13824} + \dots\right)\right) \\
\Rightarrow \sum &= \frac{1}{D} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\ D - \frac{1}{720}\ D^3 + \dots
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
\sum{}^{(m)} &= \frac{1}{\delta} \\
\sum{}^{(m)} \frac{1}{m} &= \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{\delta}\right) \\
&= \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{e^{1/m\ D} - 1}\right) \\
\sum{}^{(m)} \frac{1}{m} &= \frac{1}{D} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}\ D - \frac{1}{720m^4}\ D^3 + \dots
\end{aligned}$$

Luego:

$$\sum = \frac{1}{D} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\ D - \frac{1}{720}\ D^3 + \dots$$

Y,

$$\sum{}^{(m)} \quad = \quad \frac{1}{D} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}\ D - \frac{1}{720m^4}\ D^3 + \dots \tag{4.2}$$

Restando la ecuación 4.2 de la ecuación 4.1 se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum{}^{(m)} - \sum &= \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\ D + \frac{m^4-1}{720m^4}\ D^3 + \dots \\
\sum{}^{(m)} &= \sum + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\ D + \frac{m^4-1}{720m^4}\ D^3 + \dots
\end{aligned}$$

De donde finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty}{}^{(m)}\ [\,] &= \sum_{t=0}^{\infty}[\,] + \frac{m-1}{2m}[\,]\Big|_0^{+\infty} - \frac{m^2-1}{12m^2}\ \left[\frac{d}{dt}[\,]\right]\Bigg|_0^{+\infty} + \\
&\quad \frac{m^4-1}{720m^4}\ \left[\frac{d^3}{dt_3}[\,]\right]\Bigg|_0^{+\infty} + \dots
\end{aligned}$$

Esta última se denomina fórmula *Woolhouse* y relaciona sumas a intervalos unitarios con sumas a intervalos fraccionados $1/m$, lo cual permite hallar mejores aproximaciones para las rentas vitalicias fraccionadas que las determinadas en 4.6 como se ve a continuación:

Apliquemos la última ecuación a $\dfrac{D_{x+t}}{D_x}$ despreciando los términos desde el tercer orden:

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty}{}^{(m)}\ \frac{D_{x+t}}{D_x} = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{D_{x+t}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\frac{D_{x+t}}{D_x}\Bigg|_0^{+\infty} - \frac{m^2-1}{12m^2}\ \left[\frac{d}{dt}\frac{D_{x+t}}{D_x}\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$

Como $D_x = \upsilon^x\ lx$

$$\frac{d}{dx}\ D_x = \upsilon^x\ \ \ln\upsilon\ lx + \upsilon^x\ l'x$$

$$\text{Pero } \mu_x = \frac{l'x}{lx}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dx}\, D_x &= -D_x\ \delta - \upsilon^x\ \mu_x\ lx \\
&= -D_x\ \delta - D_x\ \mu_x \\
&= -D_x(\delta + \mu_x) \\
\rightarrow \frac{d}{dt}\, D_t &= -D_t(\delta + \mu_t) \\
\frac{d}{dt}\, D_{x+t} &= -D_{x+t}(\delta + \mu_{x+t})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty}{}^{(m)}\ \frac{D_{x+t}}{D_x} &= \sum_{t=0}^{\infty}\frac{D_{x+t}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\frac{1}{D_x}(D_\infty - D_x) - \\
&\quad \frac{m^2-1}{12m^2}\left[\frac{1}{D_x}\Big(- D_\infty(\mu_\infty + \delta) + D_x(\mu_x + \delta)\Big)\right]
\end{aligned}$$

$$\text{Así, } \sum_{t=0}^{\infty}{}^{(m)}\ \frac{D_{x+t}}{D_x} = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{D_{x+t}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\ (\mu_x + \delta)$$

$$\text{Pero } \ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{D_{x+t}}{D_x} = \sum_{t=0}^{+\infty}\ {}_tE_x$$

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{t=0}^{+\infty}\ {}_{t/m}E_x \\
&= \sum_{t=0}^{+\infty}\frac{1}{m}\ {}_{t/m}E_x \\
&= \sum_{t=0}^{+\infty}\frac{1}{m}\ \frac{D_{x+t/m}}{D_x} \\
&= \sum_{t=0}^{+\infty}{}^{(m)}\ \frac{D_{x+t/m}}{D_x} \\
\Rightarrow\ \ddot{a}_x^{(m)} &= \ddot{a}^{(m)} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\ (\mu_{x+t} + \delta)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

La cual constituye una aproximación más precisa para calcular el valor de la renta fraccionada $\ddot{a}_x^{(m)}$ que la lograda en 4.6.4.

De igual manera, para la renta vitalicia post pagable (vencida):

$$\begin{aligned}
a_x^{(m)} &= \sum_{t=1}^{\infty} {}^{(m)} \frac{D_{x+t}}{D_x} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} {}^{(m)} \frac{D_{x+t}}{D_x} - \frac{1}{m}\frac{D_{x+0/m}}{D_x} \\
&= \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \\
&= \ddot{a}^{(m)} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x+\delta) - \frac{1}{m} \\
&= a_x + 1 - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x+\delta) - \frac{1}{m} \\
a_x^{(m)} &= a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x+\delta)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Que es la fórmula de Woolhouse para el cálculo de $a_x^{(m)}$

4.9. Rentas de supervivencia en el campo continuo

Cuando la frecuencia de los pagos se vuelve muy grande (i.e. $m \to \infty$) se puede considerar que los pagos se realizan de manera continua, y en ese caso se tienen las denominadas rentas en el campo continuo. Las principales se analizan a continuación:

Sea T la variable aleatoria que describe el tiempo de vida futura de (x), el valor actual de los pagos de la renta hasta el momento del f/q se representa con $\bar{a}_{\overline{T}|}$.

Y un valor actuarial es:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= E(\bar{a}_{\overline{T}|}) \\
&= \int_0^{+\infty} \upsilon^t \; {}_tp_x \; dt
\end{aligned}$$

o también hallando el límite en 4.4:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \lim_{m\to\infty} a_x^{(m)} \\
\bar{a}_x &= a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,(\mu_x + \delta)
\end{aligned}$$

En cambio el riesgo de esa renta vitalicia se calcularía con la varianza:

$$\begin{aligned}
Var\ \bar{a}_{\overline{T}|} &= Var\left(\frac{1-\upsilon^T}{\delta}\right) \\
&= \frac{1}{\delta^2}\ Var\ (\upsilon^T) \\
Var\ \bar{a}_{\overline{T}|} &= \frac{1}{\delta^2}\ Var\ \left(\,{}^2\overline{A}_x - \overline{A}_x^2\right)
\end{aligned}$$

De manera similar, otros valores actuariales de rentas en el campo continuo son:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \int_0^{+\infty} \upsilon^t\ {}_tp_x\ dt \\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{n} \upsilon^t\ {}_tp_x\ dt \\
{}_{n/}\bar{a}_x &= \int_n^{+\infty} \upsilon^t\ {}_tp_x\ dt \\
{}_{n/m}\bar{a}_x &= \int_n^{n+m} \upsilon^t\ {}_tp_x\ dt
\end{aligned}$$

4.10. Valores actuariales de rentas variables

En este caso, los pagos no se consideran fijos sino variables: en progresión aritmética o en progresión geométrica y se pueden establecer como funciones de las rentas anteriores.

4.10.1. Valor actuarial de una renta con pagos crecientes que varían en progresión aritmética con razón unitaria y término inicial 1 u.m., inmediata, anticipada y temporal por n años

Ya que ${}_tE_x$ es el valor actuarial de 1 u.m. pagadera al año t, si hay sobrevivencia, es claro que el valor actuarial de esta renta representada con $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ es igual a:

$$
\begin{aligned}
(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= 1+2(\,_1E_x)+3(\,_2E_x)+\ldots+n(\,_{n-1}E_x)\\
&= 1+\,_1E_x+\,_2E_x+\ldots+\,_{n-1}E_x\\
&\qquad\ \,_1E_x+\,_2E_x+\ldots+\,_{n-1}E_x\\
&\qquad\qquad\quad\ \,_2E_x+\ldots+\,_{n-1}E_x\\
&\qquad\qquad\qquad\quad\ \ddots \qquad \vdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \,_{n-1}E_x\\
\Rightarrow (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \,_n\ddot{a}_x+\,_{1/n-1}\ddot{a}_x+\,_{2/n-2}\ddot{a}_x+\ldots+\,_{n-1/1}\ddot{a}_x\\
&= \sum_{t=0}^{n-1}\,_{t/n-t}\ddot{a}_x\\
\Rightarrow (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1}\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Con el símbolo de conmutación $S_x=\sum_{t=x}^{\infty}N_t$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=0}^{n-1}N_{x+t}-n\ N_{x+n}\right)\\
&= \frac{S_x-S_{x+n}-n\ N_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Y en el caso vencido el valor actuarial de esta renta es:

$$
\begin{aligned}
(I\ a)_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1}\,_{t/n-1}a_x\\
&= \sum_{t=0}^{n-1}\frac{N_{x+t+1}-N_{x+n+1}}{D_x}\\
(I\ a)_{x:\overline{n}|} &= \frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}-n\ N_{x+n+1}}{D_x}
\end{aligned}
$$

4.10.2. Valor actuarial de una renta vitalicia variable en progresión aritmética con razón unitaria anual anticipada e inmediata

Siguiendo el razonamiento anterior se puede obtener fácilmente que:

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_x &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}\ddot{a}_x \\ &= \frac{S_x}{D_x}\end{aligned}$$

Y en el caso vencido:

$$\begin{aligned}(Ia)_x &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}\ddot{a}_x \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t+1}}{D_x} \\ (Ia)_x &= \frac{S_{x+1}}{D_x}\end{aligned}$$

4.10.3. Valor actuarial de una renta diferida en m años temporal por n años, variable en progresión aritmética de razón unitaria, anticipada

Con el mismo procedimiento se obtiene:

$${}_{m/n}(I\ddot{a})_x = \frac{S_{x+m} - S_{x+m+n} - n\ N_{x+m+n}}{D_x}$$

Y en el caso vencido:

$${}_{m/n}(Ia)_x = \frac{S_{x+m+1} - S_{x+m+n+1} - n\ N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

4.10.4. Valor actuarial de una renta vitalicia variable en progresión aritmética con razón unitaria anual diferida por m años

En el caso anticipado:

$$_{m/}(I\ddot{a})_x = \frac{S_{x+m}}{D_x}$$

Y en el caso vencido:

$$_{m/}(Ia)_x = \frac{S_{x+m+1}}{D_x}$$

4.10.5. Valor actuarial de una renta vitalicia inmediata variable en progresión aritmética con razón unitaria por n años vencida con pagos que permanecen constantes e iguales a n durante el resto de supervivencia

$$\begin{aligned}(I_{\overline{n}|}\, a)_x &= \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}a_x \\ &= \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1}}{D_x}\end{aligned}$$

Y en el caso diferido por m años:

$$_{m/}(I_{\overline{n}|}\, a)_x = \frac{S_{x+m+1} - S_{x+n+m+1}}{D_x}$$

De manera similar se obtienen los siguientes valores actuariales de rentas con pagos variables:

$$\begin{aligned}_{m/n}(I_{\overline{k}|}\, a)_x &= \frac{S_{x+m+1} - S_{x+m+k+1} - k\ N_{x+m+n+1}}{D_x} \\ (I_{\overline{k}|}\, \ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{S_x - S_{x+k} - k\ N_{x+n}}{D_x} \\ (I_{\overline{k}|}\, a)_{x:\overline{n}|} &= \frac{S_{x+1} - S_{x+k+1} - k\ N_{x+n+1}}{D_x} \\ (Ia_x) &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}a_x \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t+1}}{D_x} \\ (Ia_x) &= \frac{S_{x+1}}{D_x}\end{aligned}$$

4.10.6. Valor actuarial de una renta variable decreciente en progresión aritmética con razón 1 cuyo primer pago es de n u.m. y cesando en el n-ésimo pago de 1 u.m.

En el caso vencido el valor actuarial de esta renta, representada con el símbolo $(Da)_{x:\overline{n|}}$ es:

$$\begin{aligned}
(Da)_{x:\overline{n|}} &= n\ {}_1E_x + (n-1)\ {}_2E_x + (n-2)\ {}_3E_x + \ldots + 2\ {}_{n-1}E_x +_n E_x \\
&= {}_1E_x +_2 E_x +_3 E_x + \ldots +_{n-1} E_x +_n E_x \\
&+ {}_1E_x +_2 E_x +_3 E_x + \ldots +_{n-1} E_x \\
&\quad \vdots \\
&+ {}_1E_x +_2 E_x \\
&+ {}_1E_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Da)_{x:\overline{n|}} &= \sum_{t=1}^{n} a_{x:\overline{t|}} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x} \\
&= \frac{1}{D_x}\left(n\ N_{x+1} - \sum_{t=x}^{x+n-1} N_{t+2}\right) \\
(Da)_{x:\overline{n|}} &= \frac{1}{D_x}\ \big(n\ N_{x+1} - (S_{x+2} - S_{x+n+2})\big)
\end{aligned}$$

Y en el caso anticipado:

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\ \big(nN_{x+1} - (S_{x+1} - S_{x+n+1})\big)$$

4.10.7. Rentas variables y fraccionadas m veces al año

En este caso nos referimos a las rentas que son pagaderas cada m-ésima fracción del año y cuyos pagos no son constantes sino variables, las principales son:

- Valor actuarial de una *renta vitalicia* pagadera m veces al año cuyos pagos se incrementan luego de cada año y son iguales a $1/m$ en cada fracción dentro de cada año:

En el caso vencido:

$$\begin{aligned}
(Ia)_x^{(m)} &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}a_x^{(m)} \\
(Ia)_x^{(m)} &\cong \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}a_x + \frac{m-1}{2m}\ {}_tE_x \\
&\cong \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t+1} + \dfrac{m-1}{2m} D_{x+t}}{D_x}
\end{aligned}$$

Luego:

$$(Ia)_x^{(m)} \approx \frac{S_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\frac{N_x}{D_x}$$

En el caso continuo ($m \to \infty$) se tiene:

$$\begin{aligned}
(I\bar{a})_x &= \text{lím}(Ia)_x^{(m)} \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(S_{x+1} + \frac{m-1}{2m}N_x\right)\frac{1}{D_x} \\
(I\bar{a})_x &= \frac{S_{x+1} + \dfrac{1}{2}N_x}{D_x}
\end{aligned}$$

- Valor actuarial de una renta vencida vitalicia cuyos pagos se incrementan anualmente al tanto $1/m$, i.e. que el primer pago es de $1/m^2$ al finalizar la $1/m$ parte del primer año, $2/m^2$ al finalizar la $2/m$ parte del primer año, $3/m^2$ al finalizar la $3/m$ parte del primer año, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned}
(I^{(m)}a_x)_x^{(m)} &= \frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{m^2}\ D_{x+\frac{t}{m}} \\
&= \frac{S_{x+1}}{D_x} + \frac{m^2-1}{12m^2}
\end{aligned}$$

Si los pagos se realizan de manera continua ($m \to \infty$)

$$(\bar{I}\bar{a})_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} + \frac{1}{12}$$

4.11. Problemas resueltos

Problema 4.1 *Comprobar que se verifica la expresión siguiente:*

$$\frac{a_{\overline{1}|}\ S_x - \ddot{a}_{\overline{1}|}\ S_{x+1} + \ddot{a}_{\overline{1}|}\ S_{x+2}}{D_x} = A_x$$

Solución

$$\begin{aligned}
a_{\overline{1}|}\ S_x - \ddot{a}_{\overline{1}|}\ S_{x+1} + \ddot{a}_{\overline{1}|}\ S_{x+2} &= \frac{\upsilon\ S_x - (1+\upsilon)\ S_{x+1} + S_{x+2}}{D_x} \\
&= \frac{\upsilon \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t} - (1+\upsilon) \sum_{t=1}^{\infty} N_{x+t} + \sum_{t=2}^{\infty} N_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{\upsilon N_x - N_{x+1}}{D_x} \\
&= \frac{\upsilon \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t} - \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{x+t+1}\ l_{x+t} - \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{x+t+1}\ l_{x+t+1}}{D_x} \\
&= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{x+t+1}\ (l_{x+t} - l_{x+t+1})}{D_x} \\
&= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{x+t+1}\ d_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{M_x}{D_x} = A_x
\end{aligned}$$

Problema 4.2 *Consideremos una renta a favor de (x) de 10 u.m. pagadera semanalmente, con una pensión de 5 u.m. semanales a favor de (y), durante 5 años. Se pide calcular el valor actuarial del montante en símbolos de conmutación.*

Solución

Entonces el monto de capitalización actuarial asumiendo que un año tiene 52 semanas es:

En (x) como es en un periodo de 1 año que se fija la renta entonces $(52)(10 \text{ u.m}) = 520$

En (y) como es en un período de 5 años que se fija la renta entonces $(52)(5 \text{ u.m}) = 260$

$$M = (520)\frac{N_x + 1}{D_x} + (260)\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Para una mejor apreciación podemos asumir que $x = 40$ y que la operación se desarrolla en el campo continuo entonces:

$$M = (520)\frac{\overline{N}_{41}}{D_{40}} + (260)\frac{\overline{N}_{40} - \overline{N}_{45}}{D_{40}}$$

Problema 4.3 *Cual de las expresiones siguientes es igual a $\bar{a}_x^{(m)}$*

a) $\dfrac{\delta}{i^{(m)}}\ \bar{a}_x$

b) $v^{1/m}\ \ddot{a}_x^{(m)}$

c) $E = \dfrac{1 - v^t}{i^{(m)}}$

Solución

$$\bar{a}_x^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\ \bar{a}_x$$

Problema 4.4 *Comprobar si son o no correctas las siguientes expresiones. En el caso de que exista algún error, dar la expresión correcta:*

a) $\dfrac{{}_{n-1}E_{x+1}}{{}_{n}E_x} = \dfrac{i+1}{p_x}$

Solución

Esta expresión es correcta

$$\begin{aligned}
\frac{{}_{n-1}E_{x+1}}{{}_nE_x} &= \frac{\upsilon^{n-1}\ {}_{n-1}p_{x+1}}{\upsilon^n\ {}_np_x} \\
&= \frac{\upsilon^{-1}\dfrac{S(x+n)}{S(x+1)}}{\dfrac{S(x+n)}{S(x)}} \\
&= \upsilon^{-1}\frac{S(x+n)}{S(x+1)}\frac{S(x)}{S(x+n)}\ \xi^1_{x:\overline{n}|} \\
&= \left(\frac{1}{1+i}\right)^{-1}\frac{S(x)}{S(x+1)} \\
&= \frac{1+i}{\dfrac{S(x+1)}{S(x)}} \\
\frac{{}_{n-1}E_{x+1}}{{}_nE_x} &= \frac{1+i}{p_x}
\end{aligned}$$

b) $a_x - a_{x+1} = S_{x:n} + a_x\left(\dfrac{1}{{}_nE_x} - 1\right)$

Solución

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{N_{x+1}}{D_x} \\
a_{x+n} &= \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \\
S_{x:n} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \\
&= a_{x:n}\ \frac{1}{{}_nE_x}
\end{aligned}$$

Si se le cambia el signo de a_x

$$a_x - a_{x+1} = S_{x:n} - a_x\ \left(\frac{1}{{}_nE_x} - 1\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}} - \frac{N_{x+1}}{D_x}\left(\frac{D_x}{D_{x+1}}\right) + \frac{N_{x+1}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} - \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} + \frac{N_{x+1}}{D_x} \\
\frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} &= \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}}
\end{aligned}$$

c) $\dfrac{\partial(\,{}_tE_x)}{\partial x} - \dfrac{\partial(\,{}_tE_x)}{\partial t} = \mu_x + \delta$

Solución

$$\begin{aligned}
{}_tE_x &= \upsilon^t\ {}_tp_x \\
&= \upsilon^t \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
\mu_x &= -\frac{S'(x)}{S(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\,{}_tE_x)}{\partial x} &= \upsilon^t\left(\frac{S'(x+t)S(x) - S(x+t)S'(x)}{\big(S(x)\big)^2}\right) \\
&= \upsilon^t\frac{S'(x+t)}{S(x)} - \upsilon^t\frac{S(x+t)}{S(x)}\frac{S'(x)}{S(x)} \\
&= \upsilon^t\frac{S'(x+t)}{S(x)} + \upsilon^t\mu_x\frac{S(x+t)}{S(x)} \\
&= \frac{\partial\left(\upsilon^t\dfrac{S(x+t)}{S(x)}\right)}{\partial t} \\
&= \left(\frac{\upsilon^t\ln(\upsilon)S(x+t) + \upsilon^tS'(x+t)}{S(x)}\right) \\
&= \frac{\upsilon^t\ln(\upsilon)S(x+t)}{S(x)} + \frac{\upsilon^tS'(x+t)}{S(x)} \\
&= \upsilon^t\frac{S'(x+t)}{S(x)} + \upsilon^t\mu_x\frac{S(x+t)}{S(x)} - \frac{\upsilon^t\ln(\upsilon)S(x+t)}{S(x)} - \frac{\upsilon^tS'(x+t)}{S(x)} \\
&= \upsilon^t\mu_x\frac{S(x+t)}{S(x)} - \frac{\upsilon^t\ln(\upsilon)S(x+t)}{S(x)} \\
\frac{\partial(\,{}_tE_x)}{\partial x} &= \upsilon^t\frac{S(x+t)}{S(x)}\big(\mu_x - \ln(\upsilon)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\ {}_tE_x)}{\partial x} &= \upsilon^t\ {}_tp_x\big(\mu_x - \ln(e^{-\delta})\big)\\
&= \upsilon^t\ {}_tp_x\big(\mu_x + \delta\big)\\
&= \upsilon^t\ {}_tp_x(\mu_x + \delta)
\end{aligned}$$

Falso hay que multiplicar por ${}_tE_x$

d) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} = 1 - \ {}_nE_x$

Solución

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 - a_{x:\overline{n-1}|}\\
a_{x:\overline{n-1}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1\\
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1) &= 1 - \ {}_nE_x\\
1 &= 1 - \ {}_nE_x
\end{aligned}$$

Falso hay que eliminar ${}_nE_x$

e) $\upsilon\ p_x = \dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}}$

Solución

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= \frac{N_x}{D_x}\\
\ddot{a}_{x+1} &= \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}}\\
{}_nE_x &= \upsilon\ p_x\\
&= \frac{D_{x+1}}{D_x}\\
&= \frac{N_x}{D_x}\frac{D_{x+1}}{N_{x+1}}
\end{aligned}$$

Cambiar $\ddot{a}_x$ por a_x

$$\begin{aligned}
\upsilon\ p_x &= \frac{a_x}{\ddot{a}_{x+1}}\\
\frac{D_{x+1}}{D_x} &= \frac{N_{x+1}}{D_x}\frac{D_{x+1}}{N_{x+1}}
\end{aligned}$$

f) $\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \dfrac{1}{a_{x:\overline{n-1}|}} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \dfrac{1}{a_{x:\overline{n-1}|}}$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \frac{1}{a_{x:\overline{n-1}|}} &= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ a_{x:\overline{n-1}|}} \\
&= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ a_{x:\overline{n-1}|}} \\
\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{x:\overline{n-1}|}} &= -\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ a_{x:\overline{n-1}|}}
\end{aligned}
$$

Falso se cumple la igualdad pero con signo negativo

g) ${}_{10/}a_{x:\overline{10}|} = \dfrac{\ddot{S}_{x+10:\overline{10}|}\ {}_{30/}a_x}{{}_{10/}a_{x+2}}$

Solución

$$
\begin{aligned}
\ddot{S}_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \\
{}_{10/}a_x &= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \\
{}_{10/}a_{x:\overline{10}|} &= \frac{\dfrac{N_{x+10} - N_{x+20}}{D_{x+20}} \dfrac{N_{x+31}}{D_x}}{\dfrac{N_{x+13}}{D_{x+2}}} \\
&= \frac{N_{x+10} - N_{x+20}}{D_{x+20}} \frac{N_{x+31}}{D_x} \frac{D_{x+2}}{N_{x+13}}
\end{aligned}
$$

Cambiar $\ddot{S}_x$ por S_x

$$
\begin{aligned}
S_{x:\overline{n}|} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \\
{}_{10/}a_{x:\overline{10}|} &= \frac{S_{x+10:\overline{10}|}\ {}_{30/}a_x}{{}_{10/}a_{x+2}} \\
&= \frac{N_{x+11} - N_{x+21}}{D_{x+20}} \frac{N_{x+31}}{D_x} \frac{D_{x+2}}{N_{x+13}}
\end{aligned}
$$

Problema 4.5 *Para (40) calcular el valor actuarial de una renta anual de* \$10000 *pagadera a partir de los 50 años del individuo, mientras viva y con una tasa del 10 % anual.*

a) Con la mortalidad dada por la tabla del apéndice

Solución

$$\begin{aligned}
\pi &= 10000\ {}_{10/}\ddot{a}_{40} \\
&= 10000\ \frac{N_{50}}{D_{40}} \\
&= 10000\ \frac{7499,65445}{2097,38315} \\
\pi &= 35757,2
\end{aligned}$$

b) Con mortalidad dada por la ley de Moivre con edad límite de 100 años

Solución

$$\begin{aligned}
\pi &= 10000\ {}_{10/}\ddot{a}_{40} \\
&= 10000 \sum_{t=10}^{59} {}_tE_{40} \\
&= 10000 \sum_{t=10}^{59} \upsilon^t\ {}_tp_{40} \\
&= 10000 \sum_{t=10}^{59} \frac{100-40-t}{100-40}\ \upsilon^t \\
&= \frac{10000}{60} \sum_{t=10}^{59} (60-t)\ \upsilon^t \\
\pi &= 28333,4
\end{aligned}$$

Lo cual indica que el valor actuarial de la prima es fuertemente influenciado por las características de la mortalidad de la población.

4.12. Problemas propuestos

1. Si y es la variable asociada al valor financiero actual de una renta vitalicia unitaria, anticipada a favor de (x).
   SE PIDE:

   - Calcular la varianza de y, disponiendo de los siguientes valores: $\ddot{a}_x = 10$, ${}^2\ddot{a}_x = 6$, $i = 1/24$

2. Indicar cuáles expresiones son correctas y cuáles incorrectas, justificar la respuesta

   a) ${}_tp_x = 1 - \mu_{x+t}$

   b) $\dfrac{{}_{n-1}E_{x+1}}{{}_nE_x} = \dfrac{i+1}{p_x}$

   c) $v\ p_x = \dfrac{a_x}{\ddot{a}_{x+1}}$

3. Para $0 \leq t \leq 1$ y la suposición de una distribución uniforme de los fallecimientos en la edad de muerte.
   SE PIDE:

   - Demostrar que $\ddot{a}_{x+t} = \dfrac{(1+it)\ \ddot{a}_x - t\ (1+i)}{1 - t\ q_x}$
   - Demostrar que $A_{x+t} = \dfrac{1+it}{1-t\ q_x}\ A_x - \dfrac{t\ q_x}{1-t\ q_x}$

4. Con relación a una empresa que el 1 de enero de 1999 lleva funcionando 40 años, se dispone de la siguiente información:

   - El valor actuarial de 100 u.m. pagaderas el 1 de enero del año 2009, si la empresa sigue funcionando es de 72 u.m.

   - La prima única de una renta de 100 u.m. pagaderas anualmente si sigue funcionando la empresa durante 10 años, prepagables (i.e. el primer pago se realiza el 1 de enero de 1999) es de 841 u.m.

   - La prima única de una anualidad de 100 u.m. pagadera trimestralmente a la empresa durante 10 años desde el 1 de enero de 1999 es igual a π u.m.

SE PIDE:

- Hallar el valor aproximado de π

5. Determinar una fórmula con símbolos de conmutación que exprese el valor actuarial de una renta vitalicia prepagable anual, cuyo pago inicial es de 1 u.m., su segundo pago es de q u.m., su tercer pago q^2 u.m., y así sucesivamente (renta vitalicia con crecimiento geométrico, de razón q), notada con ${}^1\ddot{a}_x$

6. Determinar en términos de los símbolos de conmutación el valor actuarial de una renta de supervivencia anual inmediata, vencida que proporciona 1 u.m. de forma creciente durante los primeros n años, luego permanece constante igual a n u.m. durante k años y por último decrece con razón unitaria.

7. Con $i = 30\,\%$ una persona de 35 años contrata una renta anual vencida, cuyo primer pago será (si sobrevive) de \$500, y cada año se incrementa la renta en \$100 hasta que la renta es de \$1000 monto en el que permanece constante durante 5 años más (si sobrevive) luego de lo cual la renta pierde vigencia.
SE PIDE:

   - Calcular el monto de la prima única pura para esta renta

     a) Con la tabla de mortalidad del apéndice.

     b) Con la ley de mortalidad de Moivre con edad límite de 90 años.

8. Sabiendo que el tanto de interés anual efectivo es del $5\,\%$, y que la función de supervivencia del sector a que pertenece la empresa considerada viene dada por la relación:

$$S(x) = \frac{1}{101}\,(101 - x), \qquad 0 \leq x \leq 101$$

SE PIDE:

- Obtener el valor actuarial a_{80}

9. Dada la siguiente expresión:

$$\int_0^a \upsilon^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ \bar{a}_{x:\overline{n-t}|} \ dt$$

SE PIDE:

- Expresarla en función de $\bar{a}_n$ y $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

Capítulo 5

Primas netas

5.1. Introducción

Para establecer el pago que tiene que hacer el asegurado con el fin de tener acceso a los beneficios que estipula el contrato de un seguro, se debe usar el *principio de equilibrio financiero-actuarial*, que establece que el valor esperado de la pérdida del asegurador es cero:

$$E(\gamma) = 0$$

donde γ es la pérdida del asegurador.

Si para tener acceso a esta cobertura, el asegurado realiza un solo pago, representado con π se tendría: $\pi = E(\xi)$ donde ξ es el *valor actual* (financiero) de las prestaciones estipuladas en el contrato de seguro.

Y se dice que π es la *prima única*, que es en definitiva el pago que debe efectuar el asegurado para tener acceso a las prestaciones del seguro. Cuando este pago no se lo efectúa de una sola vez sino a través de pagos periódicos anuales, a dichos pagos se les denomina *primas netas*, que se representan con P.

Si además la frecuencia de los pagos es inferior a un año (trimestral, mensual, etc.) se dice que las primas son *primas netas fraccionadas*, y se representan con $P^{(m)}$, $P^{[m]}$ o $P\{m\}$, siendo m el número de períodos en el que se ha fraccionado el año.

En general se considera que los pagos que efectúa el asegurado son anticipados, con el primer pago el momento del contrato y los otros pagos periódicos mientras haya sobrevivencia o hasta que se cumplan las estipulaciones del contrato. En cambio las prestaciones de la aseguradora se realizan al final del periodo del suceso que originó el contrato, es decir son vencidas.

También se habla de *primas recargadas* o *brutas* cuando toman en cuenta (incluyen) todos los gastos fijos y variables inherentes a la emisión y mantenimiento de las pólizas.

5.2. Valor actuarial de las primas netas anuales para operaciones de rentas y seguros

5.2.1. Primas netas para operaciones de seguros

Por el principio de equivalencia actuarial si el seguro es de vida completa (de 1 u.m.) con pago al final del año f/q, la prima neta anual anticipada P_x, cuyo primer pago se realiza el momento del contrato y los pagos siguientes mientras sobrevive se calcula a partir de: igualar el valor actuarial de lo pagos periódicos a pagarse al asegurado con el valor actuarial de la prestación.

$$p_x \ddot{a}_x = A_x \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Luego,

$$p_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Lógicamente si la prestación del seguro es de c u.m.

$$\begin{aligned} p &= \frac{c\ A_x}{\ddot{a}_x} \\ &= c\,\frac{M_x}{N_x} \end{aligned}$$

De igual manera se pueden obtener las primas para otros tipos de seguros, el símbolo que representa a la prima neta es construido a partir del símbolo que representa a la indemnización:

- Prima neta anual anticipada para un seguro temporal a n años:

$$\begin{aligned} p^1_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A^1_{x:\overline{n}|} \\ \Rightarrow \qquad p^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \end{aligned}$$

- Prima neta anual anticipada para un seguro diferido a n años:

$$\begin{aligned}
p_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\
&= {}_nE_x \\
\Rightarrow \qquad p_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}
\end{aligned}$$

- Prima neta anual anticipada para un seguro mixto:

$$\begin{aligned}
p_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} \\
\Rightarrow \qquad p_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}
\end{aligned}$$

5.2.2. Primas netas pagaderas en a lo más en $t < n$ años

Si los pagos periódicos que hace el asegurado se realizan en a lo sumo t años, siendo $t \leq n$, se tiene las siguientes primas.

-

$$\begin{aligned}
{}_tp_x\ \ddot{a}_{x:\overline{t}|} &= A_x \\
\Rightarrow \qquad {}_tp_x &= \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \\
&= \frac{M_x}{N_x - N_{x+t}}
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
{}_tp_{x:\overline{n}|}^1\ \ddot{a}_{x:\overline{t}|} &= A_{x:\overline{n}|}^1 \\
\Rightarrow \qquad {}_tp_{x:\overline{n}|}^1 &= \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} {}_tp_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{t}|} &= A_{x:\overline{n}|} \\ \Rightarrow \qquad {}_tp_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \end{aligned}$$

5.2.3. Primas netas de rentas vitalicias

Igual que en el caso de primas netas para seguros se pueden obtener fácilmente los valores de las primas netas para rentas, como se ve a continuación, cuando estas son pagaderas en a lo más sumo t años, siendo $t \leq n$:

- $$\begin{aligned} {}_tp_{(n/\ddot{a}_x)}\,\ddot{a}_{x:\overline{t}|} &= {}_{n/}\ddot{a}_x \\ \Rightarrow \qquad {}_tp_{(n/\ddot{a}_x)} &= \frac{{}_{n/}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \\ &= \frac{N_{x+n}}{D_x}\ \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} {}_tp_{(a_x)}\,\ddot{a}_{x:\overline{t}|} &= a_x \\ \Rightarrow \qquad {}_tp_{(a_x)} &= \frac{a_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \end{aligned}$$

5.2.4. Primas netas anuales para seguros pagaderos al momento del f/q

En el campo continuo los valores de las primas netas anuales para seguros pagaderos al momento del f/q serán calculados de manera similar:

- De vida completa:
$$\bar{p}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

- Con vigencia a n años:

$$\bar{p}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

- Mixto:

$$\bar{p}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Y si las primas netas son pagaderas en a lo sumo $t < n$ años:

- ${}_t\bar{p}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$

- ${}_t\bar{p}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$

- ${}_t\bar{p}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$

Para rentas vitalicias diferidas continuas:

- $\bar{p}({}_{n/}\ddot{a}_x) = \dfrac{A^{1}_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

Si la distribución de f/q es uniforme se puede utilizar la aproximación i/δ, obteniéndose:

- $p(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} \simeq \dfrac{\frac{i}{\delta}\ \bar{A}_x}{\ddot{a}_x} = \dfrac{i}{\delta}\ \dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} = \dfrac{i}{\delta}\ p_x$

- $p(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) \simeq \dfrac{i}{\delta}\ p^{1}_{x:\overline{n}|}$

- $p(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \simeq \left(\dfrac{i}{\delta}\ p^{1}_{x:\overline{n}|}\right) + p_{x:\overline{n}|}{}^{1}$

5.3. Primas fraccionadas

Cuando el asegurado, para tener acceso a la prestación del seguro, hace pagos con una frecuencia de m veces al año (por ejemplo si $m = 12$ la prima será mensual, si $m = 4$ trimestral, etc.), la prima se denomina *prima fraccionada*. Estas primas pueden ser de dos tipos:

Primas fraccionadas con carácter liberatorio: en las cuales el asegurador no hace ningún descuento de la indemnización pactada por las primas fraccionadas no pagadas el resto del año de f/q. Se representan con $p^{(m)}$.

Primas fraccionadas sin carácter liberatorio: en las cuales el asegurador descuenta de la indemnización pactada el monto de las primas fraccionadas no pagadas durante el resto del año de f/q. Se representan con $p^{[m]}$

5.3.1. Primas fraccionadas con carácter liberatorio

- Para un seguro de vida completa

$$\begin{aligned} p_x^{(m)}\ a_x^{(m)} &= A_x \\ \Rightarrow p_x^{(m)} &= \frac{A_x}{a_x^{(m)}} \end{aligned}$$

En general se utiliza la aproximación que considera la distribución uniforme de los fallecimientos durante el año que acaece el suceso.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &\simeq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \\ \Rightarrow p_x^{(m)} &\simeq \frac{A_x}{\ddot{a}_x - \dfrac{m-1}{2m}} \end{aligned}$$

- Para un seguro con vigencia a n años

$$\begin{aligned} p_{x:\overline{n}|}^{(m)1}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= A_{x:\overline{n}|}^{1} \\ p_{x:\overline{n}|}^{(m)1} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}} \\ &\simeq \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \dfrac{m-1}{2m}\ (D_x - D_{x+n})} \end{aligned}$$

- Para un seguro mixto

$$\begin{aligned} p_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}} \\ &\simeq \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \dfrac{m-1}{2m}\ (D_x - D_{x+n})} \end{aligned}$$

Si los pagos se efectúan en a lo sumo $t < n$ años

- Para un seguro con vigencia a n años

$$
\begin{aligned}
{}_tp^{(m)1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t}|}} \\
&\simeq \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t} - \dfrac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+t})}
\end{aligned}
$$

- Para un seguro mixto

$$
\begin{aligned}
{}_tp^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t}|}} \\
&\simeq \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t} - \dfrac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+t})}
\end{aligned}
$$

- Prima Fraccionada para rentas vitalicias con diferimiento con pagos a lo sumo en $t < n$ años

$$
\begin{aligned}
{}_tp^{(m)}\ ({}_{n/}\ \ddot{a}_x)\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t}|} &= {}_{n/}\ddot{a}_x \\
\Rightarrow\ {}_tp^{(m)}\ ({}_{n/}\ddot{a}_x) &= \frac{{}_{n/}\ddot{a}_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t}|}} \\
&\simeq \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+t} - \dfrac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+t})}
\end{aligned}
$$

5.3.2. Primas fraccionadas sin carácter liberatorio

En este caso el asegurador deduce del valor de la indemnización pactada lo correspondiente a las primas no pagadas durante el resto del año del fallecimiento.

Así, podemos modelizar a manera de ejemplo los siguientes casos:

- Para un seguro de vida completa (si se supone distribución uniforme de los fallecimientos)

$$
\begin{aligned}
p^{[m]}_x\ddot{a}^{(m)}_x &\simeq \left(1 - \frac{m-1}{2m}\,p^{[m]}_x\right) A_x \\
\Rightarrow\ p^{[m]}_x &\simeq \frac{A_x}{\ddot{a}^{(m)} + \dfrac{m-1}{2m}\,A_x}
\end{aligned}
$$

- Para un seguro mixto

$$
\begin{aligned}
p_{x:\overline{n}|}^{[m]}\ \ddot{a}_x^{(m)} &\simeq \left(1 - \frac{m-1}{2m} p_{x:\overline{n}|}^{[m]}\right) A_{x:\overline{n}|}^{1} + {}_nE_x \\
\Rightarrow\ p_{x:\overline{n}|}^{[m]} &\simeq \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1} + {}_nE_x}{\ddot{a}_x^{(m)} + \frac{m-1}{2m}\ A_{x:\overline{n}|}^{1}}
\end{aligned}
$$

5.4. Primas fraccionadas prorrateables (promedias)

Este tipo de prima fraccionada la utiliza el asegurador cuando recoge en un contrato el hecho que cuando acaece el fallecimiento se hace un reembolso de la prima promedio que cubre el período, desde el momento que ocurre el suceso hasta el momento en que se pagan las primas. Por ejemplo si el fallecimiento ocurre un mes después que se haya pagado una prima semestral, se reembolsan 5/6 de esta prima además de la prestación convenida. Este tipo de prima se representa con $P^{\{m\}}$.

A continuación, a manera de ejemplo, se plantean las primas prorrateables para un seguro de vida completa y para un seguro mixto.

- Seguro de vida completa:

$$
\begin{aligned}
p_x^{\{m\}}\ \ddot{a}_x^{(m)} &\simeq \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p_x^{\{m\}}}{m}\right) A_x \\
p_x^{\{m\}} &= \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p_x^{\{m\}}}{m}\right) p_x^{\{m\}}
\end{aligned}
$$

Y, si la prima prorrateable fuera pagadera anualmente, se tendría:

$$
\begin{aligned}
p_x^{\{1\}} &\simeq \left(1 + \frac{p_x^{\{1\}}}{2}\right) p_x^{\{1\}} \\
p_x^{\{1\}} - \frac{p_x^{\{1\}}}{2}\ p_x^{\{1\}} &\simeq p_x^{\{1\}} \\
p_x^{\{1\}} &\simeq \frac{p_x^{\{1\}}}{1 - \dfrac{p_x^{\{1\}}}{2}}
\end{aligned}
$$

$$p_x^{\{1\}} \simeq \frac{p_x}{1 - \frac{p_x^{\{1\}}}{2}}$$

- Seguro Mixto:

$$p_{x:\overline{n|}}^{\{m\}}\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p_{x:\overline{n|}}^{\{m\}}}{m}\right) A_{x:\overline{n|}}^{\ 1} + {}_nE_x$$

5.5. Primas Recargadas

Estas primas representan el precio de servicio pagado por el asegurado, que tiene que hacer frente a los distintos costos:

1. Los derivados de las indemnizaciones establecidos en el contrato; y,
2. Los costos de gestión interna y externa derivados de la realización y mantenimiento del contrato.

Para llegar a establecer el monto de las primas siempre hacemos referencia al principio de equilibrio financiero-actuarial que establece que el valor actuarial de las prestaciones debe ser igual al valor actuarial de las primas pagadas:

$$\text{VA (prestaciones)} = \text{VA (primas pagadas)}$$

Al hablar de primas recargadas nos referimos a las primas compuestas por la prima pura más recargos inherentes a la emisión y mantenimiento de las pólizas, entre las principales tenemos a las primas de inventario y primas comerciales.

5.5.1. Primas de inventario

Estas primas se calculan como la prima pura más los gastos de gestión interna o gastos de administración generados en la empresa aseguradora, y se representan con p'.

Estos gastos de gestión interna se producen hasta que fallezca el asegurado, o termine el período de vigencia de la póliza y se puede representar por mediop de una renta anticipada de δ u.m. equivalente a cierto porcentaje del capital asegurado.

Por ejemplo, la prima de inventario para un seguro de vida completa cuya prima p'_x es pagadera mientras el asegurado sobreviva, se calcula de la siguiente manera utilizando el principio de equilibrio financiero actuarial:

$$p'_x \; \ddot{a}_x = A_x + \delta \; \ddot{a}_x$$

Luego,

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{A_x + \delta \; \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} \\ &= \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \delta \\ \Rightarrow p'_x &= p_x + \delta \end{aligned}$$

Si en cambio las primas son pagaderas mientras el asegurado sobreviva pero a lo más durante t años:

$$p'_{x:\overline{t}|} \; \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = A_x + \delta \; \ddot{a}_x$$

Luego,

$$\begin{aligned} p'_{x:\overline{t}|} &= \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} + \delta \; \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \\ &= p'_{x:\overline{t}|} + \delta \; \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \end{aligned}$$

Es decir la prima de inventario es igual a la prima pura más un término $\delta \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$, el cual es mayor que los gastos de gestión interna δ.

5.5.2. Primas comerciales

Estas primas están compuestas por la prima pura, más todos los recargos inherentes a los gastos de gestión interna y los gastos de gestión externa. Entre los gastos de gestión externa se incluyen gastos de mantenimiento, gastos de gestión de cartera, de cobro de recibos, recargos de seguridad y beneficio, etc. Se representan con P''.

Al contrario de los gastos de gestión interna, los de gestión externa hay que contabilizarlos mientras haya pago de primas y se calculan como un porcentaje β de todas las primas comerciales.

Además, se deben incluir, los gastos de producción de la póliza, las cuales son proporcionales al valor de la prima comercial y se calculan como un porcentaje de la misma.

Por ejemplo, la prima comercial para un seguro de vida completo cuya prima comercial P''_x es pagadera mientras el asegurado viva, de acuerdo al principio de equilibrio financiero actuarial es:

$$p''_x\ \ddot{a}_x = A_x + \delta\ \ddot{a}_x + \alpha\ p''_x + \beta\ p''_x\ \ddot{a}_x$$

Donde P''_x es la prima comercial, pagadera anticipadamente de manera anual mientras viva, A_x es el valor actuarial de la indemnización pactada (en este caso un seguro de vida completa), $\delta\ \ddot{a}_x$ representa a los gastos de gestión interna, $\alpha\ P''_x$ los gastos de producción, y $\rho\ P''_x\ \ddot{a}_x$ los gastos de gestión externa.

Luego,

$$p''_x = \frac{A_x + \delta\ \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x - \alpha - \beta\ \ddot{a}_x}$$

Si las primas son pagaderas mientras viva el asegurado pero a lo sumo durante t años:

$$p''_{x:\overline{t}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = A_x + \delta\ \ddot{a}_x + \alpha\ p''_{x:\overline{t}|} + \beta\ p''_{x:\overline{t}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{t}|}$$

Donde,

$$\frac{\alpha\ p_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$$

es el recargo de producción, denominado también cuota de amortización de las comisiones descontadas.

Luego,

$$p''_{x:\overline{t}|} = \frac{A_x + \delta\ \ddot{a}_x}{(1-\beta)\ \ddot{a}_{x:\overline{t}|} - \alpha}$$

5.6. Problemas resueltos

Problema 5.1 *Dadas las funciones siguientes dar una expresión aproximada de ellas e interpretarlas en términos económicos:* $P^{(m)}$, $n\ P^{(m)}$, ${}_tP^{(m)}$, ${}_t\bar{P}\ (A_{x:\overline{n}|}^{\ 1})$.

a) $P^{(m)}\ (\bar{A}_{x:\overline{n}|})$

Solución

$$P^{(m)}\ (\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}$$

b) $P^{(m)}\ (\bar{A}_x)$

Solución

$$P^{(m)}\ (\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}^{(m)}_x}$$

c) ${}_tP^{(m)}\ (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})$

Solución

$${}_tP^{(m)}\ (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$$

d) ${}_tP\ (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$

Solución

$${}_tP\ (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$$

Problema 5.2 *Simplificar la expresión siguiente:*

$$E = \frac{{}_mP_{x:\overline{m+n}|} - \ {}_mP_x}{P_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}}$$

Solución

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{{}_mP_{x:\overline{m+n}|} - {}_mP_x}{P_{x:\overline{m}|}^{\;1}} \\
&= \frac{\dfrac{A_{x+m:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} - \dfrac{A_{x+m}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}}{\dfrac{A_{x:\overline{m}|}^{\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}} \\
&= \frac{A_{x+m:\overline{n}|} - A_x}{A_{x:\overline{m}|}^{\;1}} \\
&= \frac{\dfrac{M_x - M_{x+m+n} + D_{x+m+n} - M_x}{D_x}}{\dfrac{D_{x+m}}{D_x}} \\
&= \frac{-M_{x+m+n} + D_{x+m+n}}{D_{x+m}} \\
&= \frac{(M_{x+m} - M_{x+m+n} + D_{x+m+n}) - M_{x+m}}{D_{x+m}} \\
E &= A_{x+m:\overline{n}|} - A_{x+m}
\end{aligned}
$$

Problema 5.3 *Determinar en símbolos de conmutación la prima anual neta pagadera cuatrimestralmente durante 20 años que proporciona una renta diferida de* 15 *u.m. mensuales, correspondientes a una empresa que lleva funcionando 30 años y cuyo primer pago se realiza al final de los 50 años.*

Solución

$$
\begin{aligned}
p\;\ddot{a}^{(3)}_{30:\overline{20}|} &= (15)(12)\;{}_{20/}a^{(12)}_{30} \\
&= \frac{(15)(12)\left(\dfrac{N_{51}}{D_{30}} + \left(\dfrac{11}{24}\right)\dfrac{D_{50}}{D_{30}}\right)}{\left(\dfrac{N_{31}-N_{51}}{D_{30}}\right) + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{D_{30}-D_{50}}{D_{30}}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
p = (180)\,\frac{N_{51} + \left(\dfrac{11}{24}\right) D_{50}}{N_{31} - N_{51} + \dfrac{2}{3}\,(D_{30} - D_{50})}
$$

Problema 5.4 *Demostrar la siguiente relación:*

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \bar{a}_x - d\ (\bar{I}\bar{a})_x$$

Solución

$$ {}_tp_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} \qquad \mu_{x+t} = -\frac{S'(x+t)}{S(x)} \qquad \upsilon = e^{-\delta}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^\infty t\ \upsilon^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt \\
&= \int_0^\infty t\ \upsilon^t\ \frac{S(x+t)}{S(x)} \left(-\frac{S'(x+t)}{S(x+t)} \right) dt \\
(\bar{I}\bar{A})_x &= \frac{1}{S(x)} \int_0^\infty t\ \upsilon^t\ S'(x+t)\ dt
\end{aligned}$$

Ahora integramos por partes:

$$\begin{aligned}
u &= t\ \upsilon^t & dv &= S'(x+t)\ dt \\
du &= \upsilon^t - t\ \upsilon^t\ \ln \upsilon & v &= S(x+t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})_x &= t\ \upsilon^t\ \frac{S(x+t)}{S(x)}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)}\ (\upsilon^t - t\ \upsilon^t\ \ln \upsilon)\ dt \\
& \quad -\bigg(\int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)}\ \upsilon^t\ dt - \int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)}\ t\ \upsilon^t\ \ln \upsilon\ dt \bigg) \\
&= -\bigg(\int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)}\ \upsilon^t\ dt - \ln \upsilon \int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)}\ t\ \upsilon^t\ dt \bigg) \\
&= -\bigg(-\bar{a}_x - \ln(e^{-\delta}) \int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)}\ t\ \upsilon^t\ dt \bigg) \\
&= -\big(-\bar{a}_x + d\ (\bar{I}\bar{a})_x \big) \\
(\bar{I}\bar{A})_x &= \bar{a}_x - d\ (\bar{I}\bar{a})_x
\end{aligned}$$

Problema 5.5 *Simplificar la expresión siguiente:*

$$E = 1 - \frac{\big(p_{30:\overline{15}|} - {}_{15}p_{30}\big)\ddot{a}_{30:\overline{15}|}}{\upsilon^{15}\big(1 - {}_{15}q_{30}\big)}$$

Solución

$$
\begin{aligned}
E &= 1-\frac{p_{30:\overline{15|}}\;\ddot{a}_{30:\overline{15|}}-\;{}_{15}p_{30}\;\ddot{a}_{30:\overline{15|}}}{v^{15}\;{}_{15}p_{30}}\\
&= 1-\frac{p_{30:\overline{15|}}\;\ddot{a}_{30:\overline{15|}}}{v^{15}\;{}_{15}p_{30}}+\frac{{}_{15}p_{30}\;\ddot{a}_{30:\overline{15|}}}{v^{15}\;{}_{15}p_{30}}\\
&= 1-\frac{\dfrac{A_{30:\overline{15|}}}{\ddot{a}_{30:\overline{15|}}}\;\ddot{a}_{30:\overline{15|}}}{v^{15}\;{}_{15}p_{30}}+\frac{\ddot{a}_{30:\overline{15|}}\;\dfrac{A_{30}}{a_{30:\overline{15|}}}}{v^{15}\;{}_{15}p_{30}}\\
&= 1-\frac{A_{30:\overline{15|}}}{v^{15}\;{}_{15}p_{30}}+\frac{A_{30}}{v^{15}\;{}_{15}p_{30}}\\
&= 1-\frac{A_{30:\overline{15|}}}{{}_{15}E_{30}}+\frac{A_{30}}{{}_{15}E_{30}}\\
&= 1-\frac{\left(\dfrac{M_{30}-M_{45}}{D_{30}}\right)-\dfrac{M_{30}}{D_{30}}}{\dfrac{D_{45}}{D_{30}}}\\
&= 1-\frac{M_{30}-M_{45}-M_{30}}{D_{45}}\\
&= 1+\frac{M_{45}}{D_{45}}\\
E &= 1+A_{45}
\end{aligned}
$$

Problema 5.6 *Una persona de 45 años concierta de seguros mediante el pago de las primas anuales en tanto sobreviva las prestaciones concertadas consisten en la devolución de todas las primas netas pagadas hasta el final del año del fallecimiento más una cantidad adicional de* 1000 *u.m. Se pide calcular correspondiente prima anual sabiendo que* $M_{45}=1700$, $N_{45}=45000$, $R_{45}=27000$

Solución

La solución de equilibrio actuarial correspondiente sería:

$$P\;\ddot{a}_{45}=P(IA)_{45}+1000\;A_{45}$$

De donde,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1000\ A_{45}}{\ddot{a}_{45} - (IA)_{45}} \\ &= \frac{1000\ M_{45}}{N_{45} - R_{45}} \\ &= \frac{(1000)(1700)}{45000 - 27000} \\ P &= 94{,}4 \end{aligned}$$

Problema 5.7 *Obtener en símbolos de conmutación la prima única que se debe pagar por la cobertura de un seguro temporal de 10 años con un capital asegurado de* 500 *u.m. correspondiente a una empresa que lleva funcionando 30 años. La prima pagada será devuelta sin intereses con el capital asegurado al final del año de la quiebra de la empresa, cuando quiera que esta ocurra. Los gastos que han de tenerse en cuenta serán, por una parte, el* 3 % *de la suma asegurada y, además, unos gastos de administración a lo largo de la operación de* 1 *u.m. por cada año.*

Solución

$$\begin{aligned} P &= 500\ A_{30:\overline{10|}}^{\,1} + P\ 500\ A_{30:\overline{10|}}^{\,1} + 0{,}03\ (500) + \ddot{a}_{30:\overline{10|}} \\ &= \frac{500\ A_{30:\overline{10|}}^{\,1} + 0{,}03\ (500) + \ddot{a}_{30:\overline{10|}}}{1 - 500\ A_{30:\overline{10|}}^{\,1}} \\ P &= \frac{500\left(\dfrac{M_{30} - M_{40}}{D_{30}}\right) + 0{,}03\ (500) + \left(\dfrac{N_{30} - N_{40}}{D_{30}}\right)}{1 - 500\left(\dfrac{M_{30} - M_{40}}{D_{30}}\right)} \end{aligned}$$

Problema 5.8 *Una persona contrata un seguro de vida entera con una prestación por fallecimiento inicial de* \$1000*. El tanto de interés es del* 4 % *y las primas netas del contratante y de la prestación por el f/q están programados para que se incrementen cada año al tanto de interés del* 4 %*. La prestación por el fallecimiento es pagadero al final del año del mismo. Se pide calcular la prima neta pagadera al comienzo del primer año de operación.*

Solución

Sea P la prima neta del primer año

- Valor actuarial de las primas:

$$\begin{aligned} E(P) &= P + (1+i)P\ v\ p_x + (1+i)^2 P\ v^2\ {}_2p_x + \\ &\quad (1+i)^3 P\ v^3\ {}_3p_x + \ldots \\ &= P + P\ p_x + P\ {}_2p_x + P\ {}_3p_x \end{aligned}$$

- Valor actuarial de las prestaciones:

$$\xi = \begin{cases} 1000\ (1+i)^t\ v^{t+1} & ; \quad {}_{t/}q_x \\ 0 & ; \quad \text{sino} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi = \begin{cases} 1000\ v & ; \quad {}_{t/}q_x \\ 0 & ; \quad \text{sino} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{t=0}^{\infty} 1000\ v\ {}_tq_x \\ &= 1000\ v \sum_{t=0}^{\infty}\ {}_tq_x \\ &= 1000\ v \\ E(P) &= E(T) \end{aligned}$$

$$P\ (1 + {}_1p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \ldots) = 1000\ v$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1000\ v}{1 + ({}_1p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \ldots)} \\ &= \frac{1000\ v}{1 + e_x} \end{aligned}$$

Donde $v = \dfrac{1}{1{,}04}$, $e_x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\ {}_kP_x$

Problema 5.9 *Se contrata una operación de seguro por 25 años, unitaria a favor de una persona de 35 años. La operación también proporciona el reembolso de todas las primas netas pagadas capitalizadas al tanto de interés i si el f/q ocurre dentro de los 8 años siguientes a la fecha del contrato. Se pide hallar la prima neta anual pagadera anticipadamente.*

Solución

- Valor actuarial de las primas:

$$P\ \ddot{a}_{35:\overline{25|}}$$

- Valor actuarial prestación:

$A_{35:\overline{25|}}^{\ 1} + P\ (1+i)\ \upsilon\ {}_{0/}q_x + \Big(P\ (1+i)^2 + P\ (1+i)\Big)\ \upsilon^2\ {}_{1/}q_x + \ldots + \Big(P\ (1+i)^8 + P\ (1+i)^7 + P\ (1+i)^6 + P\ (1+i)^5 + P\ (1+i)^4 + P\ (1+i)^3 + P\ (1+i)^2 + P\ (1+i)\Big)\ \upsilon^8\ {}_{7/}q_x$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ P\ \ddot{a}_{35:\overline{25|}}^{\ 1} &= A_{35:\overline{25|}}^{\ 1} + P\ \Big(\ {}_{0/}q_{35} + (1+\upsilon)\ {}_{1/}q_{35} - \\ &\quad (1+\upsilon+\upsilon^2)\ {}_{2/}q_{35} + \ldots + (1+\upsilon+\upsilon^2+ \\ &\quad \upsilon^3 + \ldots + \upsilon^7)\ {}_{7/}q_{35}\Big)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \frac{A_{35:\overline{25|}}^{\ 1}}{\ddot{a}_{35:\overline{25|}} - \ {}_{0/}q_{35} + (1+\upsilon)\ {}_{1/}q_{35} - \ldots - (1+\upsilon+\ldots+\upsilon^7) + \ {}_{7/}q_{35}}$$

Problema 5.10 *Una persona de 30 años contrata un seguro mediante el pago de primas anuales mientras viva. La prestación del seguro consiste en la devolución de las primas netas pagadas (sin intereses) hasta el final del año de f/q más una cantidad adicional de* \$100000. *Se pide calcular la prima neta anual para* $i = 5\,\%$.

Solución

Si la devolución es sin intereses.

- Valor actuarial de las primas netas:

$$\ddot{a}_{30}$$

- Valor actuarial prestaciones:

$$P\ (IA)_{30} + 100000\ A_{30}$$

$$\begin{aligned}P\ \ddot{a}_{30} &= P\ (IA)_{30} + 100000\ A_{30} \\ \Rightarrow\ P &= \frac{P\ (IA)_{30} + 100000\ A_{30}}{\ddot{a}_{30} - (IA)_{30}}\end{aligned}$$

Problema 5.11 *Resolver el problema 5.10 con la diferencia que ahora las primas son devueltas con intereses.*

$$\xi = \begin{cases} \Big(P\ (1+i)^{t+1} + P\ (1+i)^t + \ldots + P\ (1+i)\Big)\ \upsilon^{t+1} & ; \quad {}_{t/}q_x \\ 0 & ; \quad \text{sino} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E(\xi) &= \sum_{t=0}^{\infty} \Big(P\ (1+i)^{t+1} + P\ (1+i)^t + \ldots + P\ (1+i)\Big)\ \upsilon^{t+1}\ ;\ {}_{t/}q_x \\
&= P\ \sum_{t=0}^{\infty} \Big(1 + \upsilon + \upsilon^2 + \upsilon^3 + \ldots + \upsilon^t\Big)\ {}_{t/}q_x \\
&= P\ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1-\upsilon^{t+1}}{1+\upsilon}\ {}_{t/}q_x \\
&= \frac{P}{1-\upsilon}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\ {}_{t/}q_x - \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^{t+1}\ {}_{t/}q_x\right) \\
&= \frac{P}{1-\upsilon}\ (1 - A_x) \\
P\ \ddot{a}_{30} &= 100000\ A_{30} + \frac{P}{1-\upsilon}\ (1 - A_{30}) \\
\Rightarrow\ P &= \frac{100000\ A_{30}}{\ddot{a}_{30} - \dfrac{1-A_{30}}{a-\gamma}}
\end{aligned}$$

Problema 5.12 *Una empresa que lleva funcionando 30 años concierta una operación de seguros con una prestación de* \$5,000,000 *para el caso de seguir funcionando por 20 años más; se pide:*

a) Calcular la prima única.

Solución

$$\begin{aligned}
\pi &= 5000000\ A_{30:\overline{20|}} \\
&= \frac{D_{50}}{D_{30}}
\end{aligned}$$

b) Prima anual pagadera hasta la quiebra y a lo más durante 10 años.

Solución

$$\begin{aligned} p_{30:\overline{20|}}^{\;1}\ \ddot{a}_{30:\overline{10|}} &= A_{30:\overline{20|}}^{\;1} \\ p_{30:\overline{20|}}^{\;1} &= \frac{A_{30:\overline{20|}}^{\;1}}{\ddot{a}_{30:\overline{10|}}} \\ &= \frac{D_{50}}{N_{30}-N_{40}} \end{aligned}$$

c) Prima anual recargada, pagadera como máximo durante 10 años, suponiendo que el recargo es del 5 % de la prima neta, del 4 % de la prima recargada y del 1 % del capital.

Solución

$$\begin{aligned} P' &= 5000000\ A_{30:\overline{20|}}^{\;1} + 5000000(0{,}05)\ A_{30:\overline{20|}}^{\;1} + P'(0{,}04) \\ &\quad + 5000000(0{,}01) \\ &= 5000000\ A_{30:\overline{20|}}^{\;1}(1+0{,}05) + P'(0{,}04) + 5000000(0{,}01) \\ &= 5000000\ A_{30:\overline{20|}}^{\;1}(1+0{,}05) + 5000000(0{,}01) \\ &= \frac{5000000\ A_{30:\overline{20|}}^{\;1}(1+0{,}05) + 5000000(0{,}01)}{(1-0{,}04)} \\ P' &= \frac{5000000\ \frac{D_{50}}{D_{20}}\ (1+0{,}05) + 5000000(0{,}01)}{0{,}06} \end{aligned}$$

Problema 5.13 *Una ley dispone que un trabajador jubilado recibirá de por vida, una pensión anual del* 80 % *de un último sueldo (anual) y que en el momento de su muerte: un heredero recibirá un auxilio igual a un valor de la pensión y además continuarían recibiendo por 8 años más garantizados. Hallar el valor que deberá pagar el patrono para que el trabajador que acaba de jubilarse con un sueldo anual de* \$8000 *tenga acceso a esta prestación si* $x = 65$, $i = 10\,\%$

- *La pensión se paga por anticipado*
- *La prestación por defunción se paga al final año f/q*

Solución

$$\begin{aligned} \text{Renta vitalicia} &= 80\,\% \text{ sueldo} \\ \text{Seguro} &= 1 \text{ valor pensión} \\ \text{Sueldo} &= \$8000 \\ \text{Seguro} &= 6400\ A_{65} \\ \text{Renta} &= 6400\ \ddot{a}_{65} \end{aligned}$$

Vigencia 8 años:

$$6400\ \left(1 + v + v^2 + \ldots + v^7\right)\ A_{75}$$

$$\text{Valor } T = 6400\ A_{65} + 6400\ \ddot{a}_{65} + 6400\ \left(1 + v + \ldots + v^7\right)\ A_{65}$$

5.7. Problemas propuestos

1. Una persona de edad x decide contratar un seguro que le ofrece la siguiente cobertura: pago de $\$3,000$ a la edad $x+5$; pago de capital asegurado al alcanzar con vida la edad $x+20$; pago del capital asegurado a los derechohabientes al momento de fallecimiento si el mismo tiene lugar a partir de la edad $x+20$ y si sobrevive a los 65 años de edad, el asegurado cobrará rentas anuales, mientras permanezca con vida, que crecerán en un importe fijo de \$55, siendo la primera equivalente al $5\,\%$ del capital asegurado por muerte. **NOTA:** bases técnicas usuales y capital asegurado igual a \$55000

   SE PIDE:

   - Cálculo de la prima pura única y trimestral considerando que éstas últimas se pagan al comienzo de cada trimestre durante un plazo de 10 años.

2. Una persona de edad x decide contratar un seguro que le ofrece la siguiente cobertura: pago de \$400 mensuales mientras viva a partir de la edad $x+5$; pago de capital asegurado al alcanzar con vida la edad $x+20$; pago del capital asegurado a los derechohabientes al momento de fallecimiento si el mismo tiene lugar a partir de la edad $x+20$ y si sobrevive a los 65 años de edad, el asegurado cobrará rentas mensuales de \$300, mientras permanezca con vida, con un periodo de garantía de 3 años. **NOTA**: bases técnicas usuales y capital asegurado igual a \$80000

SE PIDE:

- Cálculo de la prima pura única y semestral considerando que éstas últimas se pagan al comienzo de cada semestre durante un plazo de 10 años.

3. (x) contrata un seguro que le ofrece la siguiente cobertura:

   a) Si el asegurado sobrevive a la edad $x+20$, cobrarán a partir de los 60 días una renta mensual de \$1500 creciente en progresión aritmética $3\,\%$ acumulativo, durante 15 años.

   b) Si el asegurado fallece a partir de la edad mencionada, los derechohabientes cobrarán al fin del mes en que se produzca el deceso, un soporte equivalente al de la renta mencionada en el punto a) incrementada en un $40\,\%$ manteniéndose constante en el ultimo valor alcanzado hasta la finalización de la vigencia de esta cobertura que se establece en 25 años.

   Las primas se pagan al comienzo de cada año, mientras viva durante un plazo de 20 años, siendo la última equivalente a la vigésima parte de la primera.

   SE PIDE:

   - Prima pura única de cada una de las coberturas
   - Primas puras anuales

4. Una persona (x) solicita un préstamo reembolsable en 28 cuotas constantes, anuales y consecutivas (que incluyen intereses sobre saldos) de $\$600,12$. Si el asegurado fallece entre las edades x y $x-20$, el asegurador abonará al momento de fallecimiento el saldo adeudado por el préstamo. Las primas se abonan al comienzo de cada trimestre, mientras viva, durante un plazo de 20 años.

   SE PIDE:

   - Prima pura única
   - Primas puras trimestral, explicitando cada uno de los recargos.

5. (x) abona bimestralmente una prima de \$415, durante 15 años, mientras viva, con la condición que si fallece durante el transcurso de cualquiera de los años se harán cargo de las fracciones adecuadas a fin de completar el año. La cobertura ofrecida es la siguiente: si

(x) fallece dentro del plazo considerado para el pago de primas, se abonará el capital asegurado a los derechohabientes al fin del año de fallecimiento, el cual va creciendo en un 15 % sobre el capital asegurado inicial todos los años.

SE PIDE:

- Capital asegurado correspondiente al séptimo año.

6. (x) Contrata un seguro por el cual si el asegurado alcanza con vida la edad $x + 20$ se le abona el capital asegurado y si fallece antes de alcanzar la misma, los derechoshabientes cobrarán a la finalización del plazo de la cobertura el 200 % de dicho capital. Las primas se abonan al comienzo de cada año decreciendo en un 5 % del valor de la primera prima todos los años. Si el total abonado en concepto de primas es de $1, 260,00. Cuál es el capital asegurado?

7. (x) Contrata el 15 de octubre de 1994 un seguro temporario de muerte, por 25 años de $15000 de capital asegurado, abonando primas en forma mensual mientras viva, sin efecto liberatorio; durante idéntico plazo. Si el asegurado falleciera el 21 de julio del 2014. Cuál sería la liquidación a practicar?

8. Considere un seguro de vida completo para un individuo de x años, el capital asegurado es de C unidades monetarias pagaderas al final del año del fallecimiento; la prima neta anual anticipada es π; si $i = 10\,\%$ y la mortalidad sigue una ley de Moivre con edad límite $w = 100$.

   SE PIDE:

   - Hallar la esperanza de vida completa de (x)
   - Hallar el valor de π en función de C y de x.

9. Un seguro consiste en el pago de C unidades monetarias luego de n años si el individuo a sobrevivido hasta esa edad, con la provisión de que si el individuo fallece antes de los n años las primas pagadas serán reembolsadas sin interés. Cuál es el valor de las primas netas anuales P?

10. Expresar en símbolos de conmutación la prima neta anual para una doble protección de una persona de x años, la misma que proporcionará una indemnización de 3 u.m. si el fallecimiento ocurre antes de que la persona cumpla 65 años y una indemnización de

1 u.m. si el fallecimiento ocurre luego de cumplidos los 65 años. Se supone que las indemnizaciones se pagan al final del año del fallecimiento.

11. Una persona (x) desea contratar mediante el pago de primas netas anuales una operación de seguros cuya cobertura es de: a) el pago de C unidades monetarias trimestralmente a partir de la edad $x+10$; b) la devolución de las primas netas pagadas por el individuo sin intereses, al final del año de fallecimiento si este ocurre antes de la edad $x+5$; c) la devolución de las primas netas pagadas por el individuo más los intereses generados, al final del año de fallecimiento si este ocurre entre la edad $x+5$ y $x+10$.

    SE PIDE:

    - Hallar el monto de la prima neta en función de los símbolos de conmutación.

12. Obtener fórmulas en símbolos de conmutación para la evaluación de una renta de supervivencia anticipada, inmediata, anual, variable, para (x), con un pago inicial de 1 u.m. y el resto de pagos anuales que se incrementan en: a) 3 % del pago inicial; b) 3 % del pago anual previo.

13. Una empresa que lleva funcionando 25 años concierta una operación de seguros con las siguientes prestaciones:

    - Por su quiebra, pagadera al final del año correspondiente, 20,000 u.m. si esta acaece dentro de los 40 años posteriores a la firma del contrato y 10,000 u.m. si ocurre después.
    - La prima única se reembolsa a los 65 años si la empresa sigue funcionando.

    Si se conoce que la empresa está en un sector de empresas cuya quiebra sigue una ley con función de sobrevivencia:

    $$S(x) = 1 - \frac{x}{60}; \quad 0 \leq x \leq 60 \quad v^{40} = 0{,}3$$

    SE PIDE:

    - Calcular la prima neta anual que tendría que pagar la empresa.

14. Una persona de 25 años concierta una operación de seguros mixto, temporal por 40 años que proporciona las siguientes prestaciones:

- En el caso de que el fallecimiento acaezca antes de cumplir 65 años, se paga el capital asegurado al final del año del fallecimiento. El capital asegurado es de \$4000 el primer año, y va creciendo en 4000 u.m. en cada uno de los años siguientes hasta llegar a \$40000, cifra en la cual permanece constante en el futuro.
- En el caso de que la persona sobreviva a los 65 años, la prestación es de \$40000. Las primas son pagaderas a lo más durante la vigencia de la operación. Después de transcurridos 20 años, el valor de las primas se duplica.

SE PIDE:

- Calcular la prima anual inicial (prepagable), con $i = 10\,\%$

15. Las relaciones de recurrencia sirven para eliminar los errores de redondeo que suelen ser muy grandes, pero también para reencontrar (conocida la tasa de interés y los valores de la prima única pura) la tabla de mortalidad con los que tales valores se calcularon. Determinar los valores de P_x con los que se obtuvo: $A_{77} = 0{,}810$, $A_{76} = 0{,}800$, $A_{75} = 0{,}780$, $A_{74} = 0{,}760$, $A_{73} = 0{,}730$.

    SE PIDE:

    - Calcular p_x para $x = 73, 74, 75, 76$. Usar $i = 4\,\%$.

16. Para el siguiente ejercicio use una tasa de interés del $5\,\%$ y la tabla de mortalidad dada.

    a) Cuál es el valor una prima de anualidad de vida de \$100 mensuales para una persona de 30 años de edad.

    b) Cuál es el valor la prima de una anualidad de vida vigente a 15 años pagadera trimestralmente de \$300 para una persona de 35 años de edad.

    c) Cuál es la prima única pura de un seguro de vida completa contratado por una persona de 30 años de edad si se estipula que es pagadera al final del año de la muerte.

    d) En la práctica es conocido que los seguros no se pagan al final del año de ocurrido el deceso sino inmediatamente después de ocurrido el mismo, previas las comprobaciones del caso. Si se admite que las muertes están igualmente distribuidas durante todo el año, puede considerarse que los capitales asegurados se pagan, en promedio, medio año antes de lo que se ha calculado. Resolver c) con este criterio.

e) Cuál es la prima única pura de un seguro de vida completa contratado por una persona de 30 años que estipula que si el asegurado muere dentro del primer año, sus beneficiarios cobrarán \$500, y por cada año que tarde en producirse la muerte, la suma asegurada aumenta en \$1000. Si se paga al final del año de muerte.

f) Calcule la prima neta anual para una persona de 30 años correspondiente a un seguro de vida completa de \$5000

- Pagadera en 10 cuotas anuales
- Pagadera durante toda la vida del asegurado.

g) Considere un seguro de vida para un individuo de 40 años, con vigencia a 10 años; el capital asegurado es de C unidades mone-tarias pagaderas al final del año del fallecimiento; la prima neta anual anticipada es π; si $i = 4\,\%$ y la mortalidad sigue una ley de Moivre con edad límite $\omega = 100$.

SE PIDE:

- Hallar el valor de π en función de C.

17. Se define la función de pérdida total L de la aseguradora como la diferencia entre el valor presente de la prestación y el valor presente de los pagos del asegurado. Considere un seguro de vida completo de 1 u. m., pagadero al final del año del f/q, el cual es financiado por primas netas anuales notadas con p_x.

SE PIDE:

- Determinar la función L, su esperanza y su varianza

18. Un seguro consiste en el pago de C unidades monetarias luego de n años si el individuo a sobrevivido hasta esa edad, con la provisión de que si el individuo fallece antes de los n años las primas pagadas serán reembolsadas sin interés. Cuál es el valor de las primas netas anuales P?

19. Una persona de 40 años contrata un seguro mediante el pago de primas netas anuales durante máximo 20 años. La prestación del seguro consiste en el pago de \$100,000 (pagaderos al final del año del f/q) si este ocurre dentro de los 20 años siguientes a la firma del contrato, y si en cambio el individuo sobrevive a esa edad, se le desembolsarán pagos periódicos semestrales de \$10,000 durante el resto de su vida.

SE PIDE:

- Hallar el monto de las primas a la tasa del 30 % con la tabla de mortalidad del anexo.

20. Un seguro consiste en el pago de C u.m. luego de n años si el individuo ha sobrevivido hasta esa edad, con la provisión de que si el individuo fallece antes de los n años las primas pagadas serán reembolsadas sin interés. Cuál es el valor de las primas netas anuales P?

21. Expresar en símbolos de conmutación la prima neta anual para una doble protección de una persona de x años, la misma que proporcionará una indemnización de 3 u.m. si el fallecimiento ocurre antes de que la persona cumpla 65 años y una indemnización de 1 u.m. si el fallecimiento ocurre luego de cumplidos los 65 años. Se supone que las indemnizaciones se pagan al final del año del fallecimiento.

22. Una compañía de seguros ofrece pólizas con cobertura mixta tal que:

    a) Si el asegurado alcanza la edad $x+20$, la compañía abonará una renta mensual de \$1000 durante 5 años. A partir de ese momento, y mientras el titular de la póliza se encuentre con vida, la mencionada renta se abonará por 5 años más.

    b) Si falleciera antes de la edad $x+20$, se le abonará al fin del año de fallecimiento \$100,000 menos el 100 % de las primas pagadas, abonándose adicionalmente las primas pagadas hasta el fallecimiento, al fin del período de esa cobertura de muerte (momento $x+20$).

    Las primas se pagan anualmente durante 15 años, y además en el primer año el asegurado debe abonar, luego de pagada la primera prima, dos refuerzos semestrales de \$800 cada uno.

    El plan tiene como bases técnicas la tabla de vida de la población americana.

    SE PIDE:

    - La prima única pura del plan total y la prima neta anual de tarifa, para una persona de 40 años, si la tasa aplicable es del 10 %.

23. (x) contrata un seguro que ofrece la siguiente cobertura:

    a) Si fallece entre las edades x y $x + 20$, los derechohabientes cobrarán al fin del año del fallecimiento el capital asegurado inicial mas un 10 % acumulativo por cada año transcurrido hasta la mitad del plazo, incrementándose en un 10 % anual sobre el capital alcanzado en ese momento hasta la finalización del plazo;

    b) Si sobrevive a la edad $x + 20$, cobrará el último capital asegurado en caso de muerte. Las primas se pagan al comienzo de cada semestre por 20 años mientras viva. El capital asegurado es de \$10000.

    SE PIDE:

    - Cuál es la prima única pura?
    - Cuál es la prima neta semestral?
    - Calcular la prima neta semestral para una persona de 40 años, si la tasa aplicable es del 10 %.

24. Una empresa que lleva funcionando 40 años, contrata una operación de seguros de vida entera con una indemnización de \$100000 en caso de quiebra. Se conoce además que la ley de supervivencia del sector empresarial al que pertenece la empresa es

    $$l_x = 1000\left(1 - \frac{x}{105}\right) \quad ; \qquad 0 \leq x \leq 105$$

    y el tanto de interés $i = 10\,\%$.

    SE PIDE:

    - Calcular el monto de la prima única pura.
    - Calcular las primas netas anuales.

25. Se concierta una operación de seguros a favor de una persona de 40 años temporal por 20 años. La prestación es de \$15,000 al final del año en que acaezca el f/q, más el reembolso de las primas pagadas que hayan sido pagadas durante los primeros 10 años de operación capitalizadas al tanto de interés $i = 5\,\%$, mientras que la tasa de interés utilizada para el cálculo de la prima neta es de 10 %.

    SE PIDE:

- Calcular la prima anual neta para dicho seguro.

26. Una operación de seguros temporal por 30 años, con una prestación de 10000 u.m al final del año a favor de (20), también proporciona el reembolso de todas las primas netas, al final del año del f/q con intereses al tanto de valoración, si el asegurado no sobrevive el plazo establecido. La prima anual neta es de $317,46$ u.m.. Suponiendo que se verifica la ley de Moivre con $w = 80$.

    SE PIDE:

    - Determinar la tasa de interés de valoración.

Capítulo 6

Valor actuarial de las reservas matemáticas

6.1. Introducción

De acuerdo con el principio de equivalencia financiero actuarial el valor actuarial de las primas futuras es igual al valor actuarial de las prestaciones futuras por parte del asegurador, por lo que la pérdida esperada del asegurador π será cero, pero esta es una pérdida promedio, y entonces su valor real no será necesariamente nulo.

Se define la variable aleatoria ${}_t\pi$ como la diferencia en el momento t entre el valor actual de las prestaciones futuras del asegurador y el valor actual de los pagos de las primas futuras por parte del asegurado. Suponiendo que ${}_t\pi$ no es idénticamente nula, definimos *el valor actuarial de las reservas matemáticas* en el momento t como la esperanza matemática de ${}_t\pi$ dado que $T > t$, y el cual se representa con ${}_tV$. Es decir:

$$ {}_tV = E(\,{}_t\pi) \quad ; \qquad t < T $$

Generalmente en las operaciones de seguros de vida se supone que las Reservas matemáticas a primas netas son no negativas por lo que al asegurado le interesará mantener la operación. Esto implica que el valor esperado de las prestaciones futuras será siempre mayor que el valor esperado de las primas futuras y, por tanto, el asegurador siempre deberá disponer en su pasivo de los fondos necesarios, o lo que es lo mismo, de las reservas matemáticas ${}_tV$ para cubrir tal diferencia.

Por ejemplo en un seguro de vida entera: después de t años el valor actuarial de las prestaciones por parte del asegurador vendría dado por A_{x+t} y el valor actuarial de las primas netas futuras será $p_x\ \ddot{a}_{x+t}$, de donde el valor actuarial de las reservas matemáticas será:

$$A_{x+t} - p_x\ \ddot{a}_{x+t} = {}_tV_x\ , \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Donde $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$

Donde ${}_tV_x$ se denominaría *valor actuarial de las reservas matemáticas en el momento t para un seguro de vida completo.*

En el caso de que la duración a que se haga referencia en el cálculo del valor actuarial de las reservas matemáticas sea un número entero t de años, la función ${}_tV$ es el valor actuarial de las reservas matemáticas finales o terminales correspondientes al t-ésimo año.

Por ejemplo, determinemos las reservas matemáticas de un seguro de vida completo a primas de inventario:

Cálculo de la prima de inventario:

$$p'_x\ \ddot{a}_x = A_x + g\ \ddot{a}_x$$

Así, las reservas matemáticas con prima de inventario serán:

$${}_tV'_x = A_{x+t} + g\ \ddot{a}_x - P'_x\ \ddot{a}_{x+t}$$

Y, si la prima es pagadera durante r años:

Cálculo de la prima de inventario:

$$p'_{x:\overline{n}|} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + g\ \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad \text{Para } t < n$$

$$\begin{aligned} {}_tV'_x &= \left(A_{x+t} - p_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) + \left(g\ \ddot{a}_{x+t} - g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) \\ &= \text{Reserva a prima pura} \ + \ \text{Reserva para gastos de administración} \end{aligned}$$

$${}_tV'_x = A_{x+t} + \delta\ \ddot{a}_{x+t} \qquad \text{Para } t \geq n$$

6.2. Problemas resueltos

Problema 6.1 *Con relación a una empresa que el 1 de enero 1995 lleva funcionando 40 años, se dispone de la siguiente información:*

- *El valor actuarial de 100 u.m pagaderas el 1 de enero del año 2005, si la empresa sigue funcionando, es de 72 u.m.*

- *La prima única neta de una renta de* 100 *u.m pagaderas anualmente si sigue funcionando la empresa durante 10 años, comenzando el 1 de enero de 1996, es de* 841 *u.m.*

- *La prima única neta de una anualidad de* 100 *u.m. pagadera bimestralmente (cada 2 meses) a la empresa, durante 10 años desde el 1 de enero de 1995, es igual a* π *u.m.*

Determine el valor de la prima única y las reservas matemáticas.

Solución

$$\begin{aligned} 100\ {}_{10}E_{40} &= 72 \\ {}_{10}E_{40} &= 0{,}72 \\ (100)\ {}_{10/10}\ddot{a}_{40} &= 841 \\ {}_{10/10}\ddot{a}_{40} &= 8{,}41 \\ \pi &= (100)\ \ddot{a}^{6}_{40:\overline{10}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}^{(6)}_{40:\overline{10}|} &= \ddot{a}^{(6)}_{40} - {}_{10/}\ddot{a}^{(6)}_{40} \\ &= \ddot{a}^{(6)}_{40} - {}_{10}E_{40}\ \ddot{a}^{(6)}_{50} \\ &\simeq \ddot{a}_{40} - \frac{5}{12} - {}_{10}E_{40}\left(\ddot{a}_{50} - \frac{5}{12}\right) \\ &= \ddot{a}_{40:\overline{10}|} - \frac{5}{12} - (1 -{}_{10} E_{40}) \\ &= (a_{40:\overline{10}|} + 1 -{}_{10} E_{40}) - \frac{5}{12} - (1 - {}_{10}E_{40}) \\ &= a_{40:\overline{10}|} - {}_{10}E_{40}\left(1 - \frac{5}{12}\right) + 1 - \frac{5}{12} \\ \ddot{a}^{(6)}_{40:\overline{10}|} &= 8{,}573 \end{aligned}$$

$$\pi = (100)\ \ddot{a}^{6}_{40:\overline{10}|} = 857{,}3$$

$${}_tV_{40} = (100)\ {}_{10-t/}\ddot{a}^{(6)}_{40+t} - \pi \qquad t < 10$$

Problema 6.2 *Expresar en símbolos de conmutación el valor actuarial de las reservas matemáticas.*

$$_{15}V\ (\bar{A}_{20:\overline{25}|})$$

Solución

$$_{15}V\ (\bar{A}_{20:\overline{25}|}) = \frac{1}{D_{35}}\left(\bar{M}_{35} - \bar{M}_{45} - P\ (N_{35} - N_{45})\right)$$

Donde

$$P = \frac{\bar{M}_{20} - \bar{M}_{45}}{N_{20} - N_{45}}$$

Problema 6.3 *Si se conoce que:*

- $_{10}V_{25} = 0{,}1$
- $_{10}V_{35} = 0{,}2$

Se pide calcular el valor actuarial de las reservas matemáticas $_{20}V_{25}$

Solución

Se sabe que

$$\begin{aligned} _{10}V_{25} &= 1 - \frac{\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{25}} \\ \frac{\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{25}} &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Despejamos $\ddot{a}_{35}$ donde nos queda:

$$\begin{aligned} _{10}V_{35} &= 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}} \\ \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}} &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned} 0{,}8 &= 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{0{,}9\ \ddot{a}_{25}} \\ \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{25}} &= (0{,}8)(0{,}9) \\ &= 0{,}72 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
{}_{20}V_{25} &= 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{25}} \\
&= 1 - 0{,}72 \\
{}_{20}V_{25} &= 0{,}28
\end{aligned}$$

Problema 6.4 *Expresar en símbolos de conmutación las siguientes funciones:*

a) $(1000)\ {}_{20}V_{40}$

Solución

$$\begin{aligned}
{}_{20}V_{40} &= A_{60} - p_{40}\ \ddot{a}_{60} \\
&= A_{60} - \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40}}\ \ddot{a}_{60} \\
&= \frac{M_{60}}{D_{60}} - \frac{\frac{M_{40}}{D_{40}}}{\frac{N_{40}}{D_{40}}} \cdot \frac{N_{60}}{D_{60}} \\
&= \frac{M_{60}}{D_{60}} - \frac{M_{40}}{N_{40}}\ \frac{N_{60}}{D_{60}} \\
&= \frac{1}{D_{60}} \left(M_{60} - \frac{M_{40}}{N_{40}}\ N_{60} \right) \\
1000\ {}_{20}V_{40} &= \frac{1000}{D_{60}} \left(M_{60} - \frac{M_{40}}{N_{40}}\ N_{60} \right)
\end{aligned}$$

b) $(1000)\ {}^{10}_{5}V_{40}$

Solución

$$\begin{aligned}
{}^{10}_{5}V_{40} &= A_{45} - {}_{10}p_{40}\ \ddot{a}_{45:\overline{5}|} \\
&= \left(\frac{M_{45}}{D_{45}}\right) \left(\frac{M_{40}}{N_{40} - N_{50}}\right) \left(\frac{N_{45} - N_{50}}{D_{45}}\right) \\
1000\ {}^{10}_{5}V_{40} &= 1000 \left(\left(\frac{M_{45}}{D_{45}}\right) \left(\frac{M_{40}}{N_{40} - N_{50}}\right) \left(\frac{N_{45} - N_{50}}{D_{45}}\right) \right)
\end{aligned}$$

c) ${}^{10}_{20}V_{40}$

Solución

$$ {}^{10}_{20}V_{40} = A_{60} = \frac{\ddot{M}_{60}}{D_{60}} $$

Problema 6.5 *Si se conoce que* $i = 0{,}04$, ${}^{10}_{23}V_{15} = 0{,}585$ *y que* ${}^{10}_{24}V_{15} = 0{,}6$. *Se pide determinar* p_{38}

Solución

$$
\begin{aligned}
{}^{10}_{23}V_{15} &= A_{38} \\
{}^{10}_{24}V_{15} &= A_{39} \\
A_{38} &= \upsilon\ q_{38} + \upsilon\ p_{38}\ A_{39} \\
\frac{1}{1{,}04}\ \big(q_{38} + p_{38}(0{,}6)\big) &= 0{,}585 \\
\frac{1}{1{,}04}\ (1 - P_{38} + 0{,}6\ P_{38}) &= 0{,}585 \\
\Rightarrow\ p_{38} &= 0{,}979
\end{aligned}
$$

Problema 6.6 *Obtener la expresión del valor actuarial de las reservas matemáticas de una operación de seguro temporal, de un seguro mixto, de un seguro de vida entera pagadera en el momento f/q de una renta anticipada diferida en n años con primas pagaderas durante n años en símbolos de conmutación.*

Solución

- **Seguro temporal**

  Prima Neta

  $$ p_{x:\overline{n|}}^{\ 1} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}}^{\ 1} $$

  Reserva Matemática

  $$
  \begin{aligned}
  {}_tV_{x:\overline{n|}}^{\ 1} &= A_{x-t:\overline{n-t|}}^{\ 1} - p_{x:\overline{n|}}^{\ 1}\ \ddot{a}_{x-t:\overline{n-t|}} \\
  &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} - p_{x:\overline{n|}}^{\ 1}\ (N_{x+t} - N_{x+n})}{D_{x+t}}
  \end{aligned}
  $$

$$\begin{aligned} p_{x:\overline{n}|}^{\;1} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \end{aligned}$$

- **Seguro Mixto**

Prima Neta

$$p_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}$$

Reserva Matemática

$$\begin{aligned} {}_tV_{x:\overline{n}|} &= A_{x+t:\overline{n-t}|} - p_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\,\xi_{x:\overline{n}|}^{\;1} \\ &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n} - P_{x:\overline{n}|}\,(N_{x+t} - N_{x+n})}{D_{x+t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \end{aligned}$$

- **Seguro que paga al momento de f/q**

Prima Neta

$$p\,(\bar{A}_x)\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_x$$

Reserva Matemática

$$\begin{aligned} {}_tV\,(\bar{A}_x) &= A_{x+t} - p\,(\bar{A}_x)\,\ddot{a}_{x+t} \\ &= \frac{\bar{M}_{x+t} + p\,(\bar{A}_x)\,N_{x+t}}{D_{x+t}} \\ p\,(\bar{A}_x) &= \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{\bar{M}_x}{N_x - N_{x+n}} \end{aligned}$$

- **Caso de la renta diferida**

Prima Neta

$$p\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n/}\ddot{a}_x$$

Reserva Matemática

$$\begin{aligned} {}^{n}_{t}V\ ({}_{n/}\ddot{a}_x) &= {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t} - p\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= \frac{N_{x+n} - P\ (N_{x+t} - N_{x+n})}{D_{x+t}}\ , \quad \forall\ t < n \end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{x+t} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}\ ; \quad \forall\ t \geq n$$

Problema 6.7 *Calcular el valor de la probabilidad* p_{38}*, si se conoce que* $i = 4\,\%$, ${}^{20}_{23}V_{15} = 0{,}585$ *y* ${}^{20}_{24}V_{15} = 0{,}600$

Solución

$$\begin{aligned} {}_{t}V_x - P &= \upsilon\ q_{x+t} - \upsilon\ p_{x+t}\ {}_{t-1}V_x \\ {}^{20}_{23}V_{15} &= \upsilon\ q_{38} - \upsilon\ P_{38}\ {}^{20}_{24}V_{15} \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} 0{,}585(1{,}04) &= 1 - p_{38} - p_{38}(0{,}6) \\ p_{38} &= \frac{(-0{,}585)(1{,}04 - 1)}{1 - 0{,}6} \\ &= \frac{0{,}3916}{0{,}4} \\ &= 0{,}979 \end{aligned}$$

6.3. Problemas propuestos

1. Una política de aseguramiento decreciente para una persona de 30 años, otorga los siguientes beneficios:

Para f/q entre las edades:	**30 - 50**	**50 - 55**	**55 - 60**	**60 - 65**
Beneficio:	100000	90000	80000	60000

SE PIDE:

Escribir fórmulas en términos de los símbolos de conmutación para:

- La prima neta anual
- La prima comercial con gastos de gestión interna iguales a 1 % del capital asegurado, cobro de recibos y gastos de cartera del 3 % del valor de las primas comerciales, y los gastos de producción igual al valor de la primera prima comercial.
- La reserva al final de 30 años con primas netas puras y primas comerciales.

2. Mediante el pago de primas anuales, se concierta una operación de seguros para (x) consistente en el pago de C dólares si el fallecimiento ocurre entre los $x+20$ y los $x+40$ años del individuo, mas la devolución de las primas pagadas con interés si el fallecimiento ocurre antes que el individuo cumpla $x+10$ años, un auxilio de 4 anualidades de $C/2$ dólares a sus deudos pagaderos a partir del final del año de f/q, si este ocurre entre los $x+10$ y $x+25$ años. La fuerza de de interés aplicable es $\delta = 1$. Los gastos de gestión interna son del 2 por mil del capital asegurado, los gastos de producción corresponden al 70 % de la primera prima comercial, y los gastos de gestión de cartera (cobro de recibos) el 3 % de cada prima comercial.

   SE PIDE:

   - Calcular la prima única pura, la prima neta, la prima de inventario y la prima comercial
   - El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima pura luego de t años
   - Considere que las primas son pagaderas a lo sumo durante 12 años.

3. Mediante el pago de primas anuales, se concierta una operación de seguros para (20) consistente en el pago de \$10000 luego de 10 años, pagaderos al final del año de f/q, con un tanto de interés del 15 %. Los gastos de gestión interna son del 2 por mil del capital asegurado, los gastos de producción corresponden al 70 % de la

primera prima comercial, y los gastos de gestión de cartera (cobro de recibos) el 3 % de cada prima comercial.

SE PIDE:

- Calcular la prima única pura, la prima neta, la prima de inventario y la prima comercial
- El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima pura en $t = 5$
- El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima de inventario en $t = 5$
- El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima comercial en $t = 5$
- El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima pura en $t = 12$
- El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima de inventario en $t = 12$

Considere dos casos:

a) las primas son pagaderas mientras viva el asegurado

b) las primas son pagaderas a lo sumo durante 7 años

4. Una empresa que lleva funcionando 30 años concierta una operación de seguros temporal por 20 años, tal que la indemnización al final del año de la quiebra viene dada por $Ct = (1{,}11)t$. Las primas netas son pagaderas anticipadamente mientras funcione la empresa. Sabiendo que la tasa de interés aplicable es del 11 %.

   SE PIDE:

   - La prima neta pura si se conoce que ${}_{20}q_{30} = 0{,}12$ y $\ddot{a}_{80:\overline{20}|} = 0{,}48$
   - El valor actuarial de las reservas matemáticas en $t = 5$

5. Mediante el pago de primas anuales, se concierta una operación de seguros para (20) consistente en el pago de \$10000 si el fallecimiento ocurre entre los 40 y los 60 años del individuo, mas la devolución de las primas pagadas sin interés si el fallecimiento ocurre antes que el individuo cumpla 30 años, un auxilio de 4 anualidades de \$2000 a sus deudos pagaderos a partir del final del año de f/q, si este ocurre entre los 30 y 45 años. La tasa de interés aplicable

es del 10 %. Los gastos de gestión interna son del 2 por mil del capital asegurado, los gastos de producción corresponden al 70 % de la primera prima comercial, y los gastos de gestión de cartera (cobro de recibos) el 3 % de cada prima comercial.

SE PIDE:

- Calcular la prima única pura, la prima neta, la prima de inventario y la prima comercial
- El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima pura luego de t años
- El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima comercial luego de t años
- El valor actuarial de las reservas matemáticas a prima comercial luego de 12 años

Considere que las primas son pagaderas a lo sumo durante 12 años.

6. Hallar en símbolos de conmutación los siguientes valores actuariales de las reservas matemáticas de un seguro de vida completa, con primas netas puras pagaderas mientras viva: ${}_tV_x^{(2)}$; ${}_tV_x^{[12]}$; ${}_tV_x^{\{1\}}$

Bibliografía

[1] Ayuso M., et al, [2001] *Estadística Actuarial Vida*, Barcelona - España.

[2] Bowers N., et al, [1986] *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Illinois.

[3] Burden R., [2002] *Análisis Numérico*, N°7, Ed. Thonson Learning.

[4] Cabezas J., Sandoya F., [2000] *Cálculo Actuarial con Cadenas de Harkov: Una Aplicación*, ESPOL.

[5] Falcones E., Sandoya F., [2002] *Diseño, Desarrollo e Implementación de una Hoja Electrónica para el Cálculo y el Análisis Actuarial*, ESPOL.

[6] González A., et al [1999] *Matemática, Programación Matemática en la Economía y la Empresa*, Ed. RAMA, Madrid.

[7] Larson H., [1973] *Introduction to the Theory of Statistics*, John Wiley, New York.

[8] Louzada F., Mazucheli J., Alberto J., [2002] *Análise de Sobrevivência et Confiabilidade*, IMCA, Perú.

[9] Mendenhall W., et al [1999] *Estadística Matemática con Aplicaciones*, N°3, Ed. Interamericana, México.

[10] Rohatgi V., [1988] *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley, New York.

[11] Sánchez J., Sandoya F., [2000] *Construcción de una Tabla de Mortalidad para la Población Ecuatoriana*, ESPOL.

[12] Sandoya F., [2005] *Desarrollo de un Modelo Matemático para el Cálculo Actuarial de Pagos Periódicos Fraccionados Semestralmente con Incrementos Geométricos*, Matemática, Vol.3, No.1

[13] Trowbridge C., [1989] *Fundamental Concepts of Actuarial Science*, Actuarial Education and Research Fund, New York.

[14] Vegas Pérez A. [1981] *Estadística: Aplicaciones Econométricas y Actuariales*, Ed. Pirámide, Madrid.

[15] Villalon J., [1997] *Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas*, Ed. Pirámide, España.

Anexos

Anexo 1

Figura 6.1: Gráfico de aproximación de l_x para la población ecuatoriana

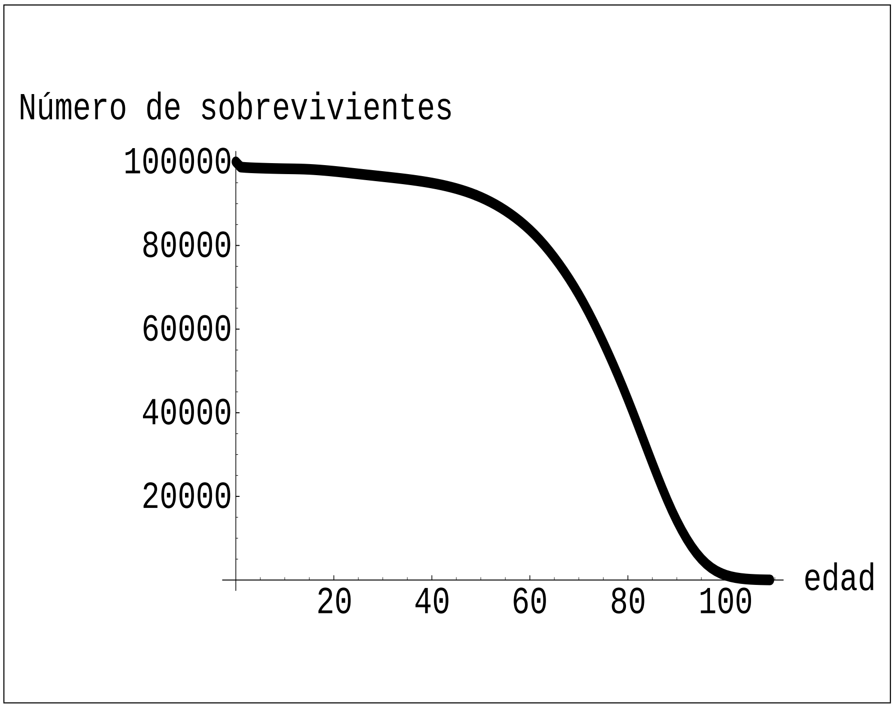
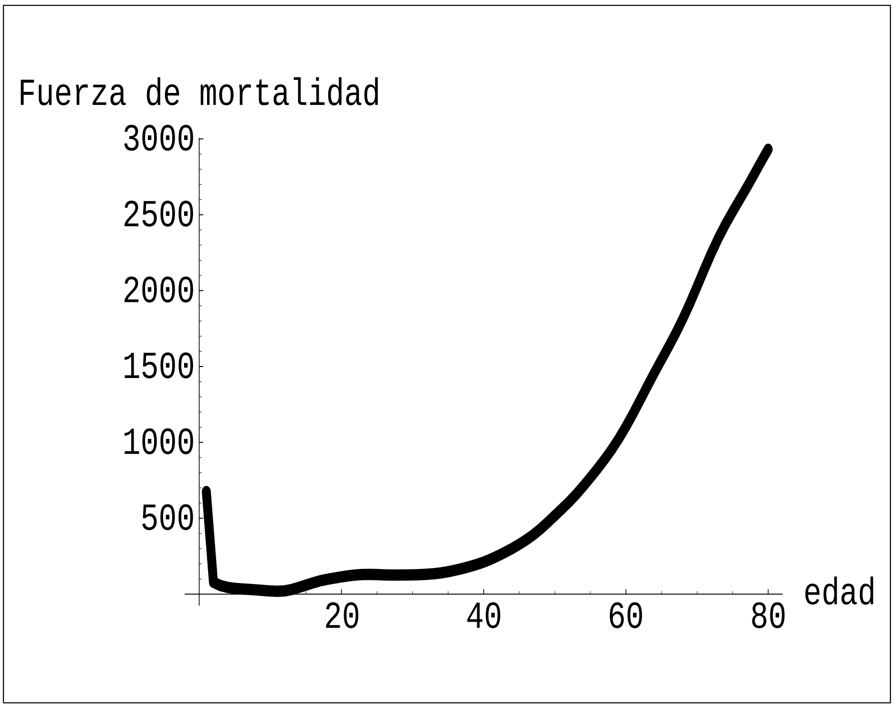


Figura 6.2: Gráfico de aproximación de μ_x para la población ecuatoriana



Anexo 2

Símbolo	Definición
$a(x)$	Número medio de los años vividos entre x y $x+1$
d_x	Número de fallecidos de edad x
${}_nd_x$	Número de fallecidos entre las edades x y $x+n$
${}_nD_x$	Número aleatorio de fallecimientos entre las edades x y $x+n$
e_x	Vida media abreviada a la edad x
$\dot{e}_x$	Vida media completa a la edad x
${}_ne_x$	Vida media temporal abreviada
${}_n\dot{e}_x$	Vida media temporal completa
$f(x)$	Función de densidad de la edad de fallecimiento
$F(x)$	Función de distribución de la edad de fallecimiento
$l(x)$	Función cohorte o grupo determinista de supervivientes: número de supervivientes a la edad x de una cohorte
l_x	Función cohorte para edades enteras
L_x	Función censal de supervivencia: promedio de individuos vivos entre x y $x+1$
${}_nL_x$	Promedio de individuos vivos entre x y $x+1$
m_x	Tanto central de fallecimientos
p_x	Tanto anual de supervivencia o probabilidad anual de supervivencia

Símbolo	Definición
${}_np_x$	Probabilidad temporal n años de supervivencia (siendo n un número entero)
q_x	Tanto anual de fallecimiento o probabilidad anual de fallecimiento
τ	Vida probable: mediana de la vida residual
${}_nq_x$	Probabilidad temporal n años de fallecimiento (siendo n un número entero)
${}_{m/n}q_x$	Probabilidad diferida m años y temporal n años de fallecimiento
$S(x)$	Función de supervivencia
$T(x)$	Vida residual a la edad x
T_x	Cantidad de existencia: número de años vividos por la cohorte a partir de la edad x
ξ	Edad de fallecimiento
x	Edad actual del individuo
Z	Operador actuarial
w	Infinito actuarial
μ_x	Tanto instantáneo de fallecimiento a la edad x
i	Tasa de interés efectiva
δ	Fuerza del interés
d	Tasa de descuento efectiva
$d^{(m)}$	Tasa de descuento nominal

Anexo 3

Tabla 1. *Tabla de funciones biométricas para la población ecuatoriana*

x	l_x	d_x
0	100000,00	1260,00
1	98740,00	92,00
2	98648,00	64,00
3	98584,00	49,00
4	98535,00	40,00
5	98495,00	36,00
6	98459,00	33,00
7	98426,00	30,00
8	98396,00	26,00
9	98370,00	23,00
10	98347,00	19,00
11	98328,00	19,00
12	98309,00	24,00
13	98285,00	37,00
14	98248,00	52,00
15	98196,00	67,00
16	98129,00	82,00
17	98047,00	94,00
18	97953,00	102,00
19	97851,00	110,00
20	97741,00	118,00
21	97623,00	124,00
22	97499,00	129,00
23	97370,00	130,00
24	97240,00	130,00
25	97110,00	128,00
26	96982,00	126,00
27	96856,00	126,00
28	96730,00	126,00
29	96604,00	127,00

Tabla 1. *Tabla de funciones biométricas para la población ecuatoriana (continuación)*

x	l_x	d_x
30	96477,00	127,00
31	96350,00	130,00
32	96220,00	132,00
33	96088,00	137,00
34	95951,00	143,00
35	95808,00	153,00
36	95655,00	163,00
37	95492,00	175,00
38	95317,00	188,00
39	95129,00	203,00
40	94926,00	220,00
41	94706,00	241,00
42	94465,00	264,00
43	94201,00	288,00
44	93913,00	314,00
45	93599,00	343,00
46	93256,00	374,00
47	92882,00	410,00
48	92472,00	451,00
49	92021,00	495,00
50	91526,00	540,00
51	90986,00	584,00
52	90402,00	631,00
53	89771,00	684,00
54	89087,00	739,00
55	88348,00	797,00
56	87551,00	856,00
57	86695,00	919,00
58	85776,00	987,00
59	84789,00	1063,00
60	83726,00	1145,00
61	82581,00	1233,00
62	81348,00	1324,00
63	80024,00	1415,00
64	78609,00	1502,00
65	77107,00	1587,00
66	75520,00	1674,00
67	73846,00	1764,00
68	72082,00	1864,00
69	70218,00	1970,00

Tabla 1. *Tabla de funciones biométricas para la población ecuatoriana (continuación)*

x	l_x	d_x
70	68248,00	2083,00
71	66165,00	2193,00
72	63972,00	2299,00
73	61673,00	2394,00
74	59279,00	2480,00
75	56799,00	2560,00
76	54239,00	2640,00
77	51599,00	2721,00
78	48878,00	2807,00
79	46071,00	2891,00
80	43180,00	2972,00
81	40208,00	3036,00
82	37172,00	3077,00
83	34095,00	3083,00
84	31012,00	3052,00
85	27960,00	2999,00
86	24961,00	2923,00
87	22038,00	2803,00
88	19235,00	2637,00
89	16598,00	2444,00
90	14154,00	2246,00
91	11908,00	2045,00
92	9863,00	1831,00
93	8032,00	1608,00
94	6424,00	1381,00
95	5043,00	1159,00
96	3884,00	945,00
97	2939,00	754,00
98	2185,00	587,00
99	1598,00	448,00
100	1150,00	335,00
101	815,00	245,00
102	570,00	177,00
103	393,00	126,00
104	267,00	88,00
105	179,00	60,00
106	119,00	41,00
107	78,00	27,00
108	51,00	18,00
109	33,00	12,00

Anexo 3

Tabla 2. *Símbolos de conmutación al 5 %*

x	C_x	D_x	M_x	R_x	N_x	S_x
0	1200,00000	100000,00000	5132,81354	211001,21943	1992208,85687	37405133,91739
1	83,44671	94038,09524	3932,81354	205868,40589	1892208,85687	35412925,06052
2	55,28561	89476,64399	3849,36683	201935,59235	1798170,76163	33520716,20366
3	40,31242	85160,56581	3794,08122	198086,22552	1708694,11764	31722545,44203
4	31,34105	81064,98835	3753,76880	194292,14430	1623533,55182	30013851,32439
5	26,86375	77173,40977	3722,42775	190538,37550	1542468,56347	28390317,77257
6	23,45248	73471,62174	3695,56400	186815,94775	1465295,15370	26847849,20910
7	20,30518	69949,52060	3672,11151	183120,38375	1391823,53197	25382554,05539
8	16,75983	66598,28587	3651,80633	179448,27224	1321874,01137	23990730,52343
9	14,12000	63410,17909	3635,04650	175796,46590	1255275,72550	22668856,51206
10	11,10891	60376,52675	3620,92650	172161,41940	1191865,54641	21413580,78656
11	10,57991	57490,34514	3609,81759	168540,49290	1131489,01967	20221715,24015
12	12,72771	54742,12974	3599,23768	164930,67531	1073998,67453	19090226,22048
13	18,68751	52122,63395	3586,50997	161331,43763	1019256,54479	18016227,54595
14	25,01289	49621,91625	3567,82245	157744,92766	967133,91084	16996971,00117
15	30,69347	47233,95496	3542,80956	154177,10521	917511,99459	16029837,09033
16	35,77633	44954,02554	3512,11609	150634,29565	870278,03963	15112325,09574
17	39,05894	42777,58133	3476,33976	147122,17955	825324,01409	14242047,05611
18	40,36486	40701,49471	3437,28082	143645,83979	782546,43276	13416723,04202
19	41,45784	38722,96343	3396,91596	140208,55897	741844,93805	12634176,60927
20	42,35520	36837,55495	3355,45812	136811,64301	703121,97462	11892331,67122
21	42,38938	35041,03046	3313,10292	133456,18489	666284,41968	11189209,69660
22	41,99870	33330,02058	3270,71353	130143,08198	631243,38921	10522925,27692
23	40,30883	31700,87805	3228,71483	126872,36844	597913,36863	9891681,88771
24	38,38936	30151,00360	3188,40601	123643,65361	566212,49059	9293768,51908
25	35,99881	28676,85216	3150,01665	120455,24760	536061,48699	8727556,02849
26	33,74889	27275,28896	3114,01783	117305,23096	507384,63483	8191494,54150
27	32,14180	25942,71679	3080,26894	114191,21313	480109,34587	7684109,90667
28	30,61124	24675,20752	3048,12714	111110,94418	454166,62909	7204000,56080
29	29,38494	23469,58640	3017,51591	108062,81704	429491,42157	6749833,93171

Tabla 2. *Símbolos de conmutación al 5 % (continuación)*

x	C_x	D_x	M_x	R_x	N_x	S_x
30	27,98565	22322,60211	2988,13097	105045,30113	406021,83517	6320342,51014
31	27,28260	21231,63541	2960,14532	102057,17016	383699,23305	5914320,67498
32	26,38318	20193,32255	2932,86272	99097,02484	362467,59764	5530621,44192
33	26,07861	19205,35259	2906,47954	96164,16212	342274,27510	5168153,84428
34	25,92451	18264,73338	2880,40093	93257,68258	323068,92251	4825879,56919
35	26,41658	17369,05966	2854,47642	90377,28164	304804,18913	4502810,64668
36	26,80301	16515,54500	2828,05984	87522,80522	287435,12947	4198006,45754
37	27,40594	15702,28746	2801,25683	84694,74538	270919,58448	3910571,32807
38	28,03982	14927,15355	2773,85089	81893,48855	255217,29701	3639651,74359
39	28,83527	14188,29690	2745,81107	79119,63766	240290,14346	3384434,44658
40	29,76195	13483,82844	2716,97580	76373,82658	226101,84657	3144144,30312
41	31,05035	12811,97942	2687,21385	73656,85078	212618,01813	2918042,45655
42	32,39396	12170,83481	2656,16350	70969,63693	199806,03871	2705424,43843
43	33,65606	11558,87729	2623,76954	68313,47343	187635,20390	2505618,39972
44	34,94710	10974,79849	2590,11347	65689,70389	176076,32661	2317983,19582
45	36,35686	10417,24194	2555,16637	63099,59042	165101,52812	2141906,86920
46	37,75501	9884,82594	2518,80951	60544,42405	154684,28618	1976805,34108
47	39,41826	9376,36494	2481,05450	58025,61454	144799,46024	1822121,05490
48	41,29532	8890,45310	2441,63624	55544,56004	135423,09531	1677321,59466
49	43,16584	8425,80287	2400,34091	53102,92380	126532,64221	1541898,49935
50	44,84763	7981,40831	2357,17507	50702,58288	118106,83934	1415365,85714
51	46,19227	7556,49362	2312,32744	48345,40781	110125,43102	1297259,01781
52	47,53314	7150,46832	2266,13517	46033,08037	102568,93740	1187133,58678
53	49,07202	6762,43669	2218,60203	43766,94520	95418,46908	1084564,64938
54	50,49321	6391,34387	2169,53001	41548,34317	88656,03239	989146,18030
55	51,86299	6036,50095	2119,03680	39378,81317	82264,68851	900490,14791
56	53,04980	5697,18554	2067,17380	37259,77637	76228,18756	818225,45940
57	54,24206	5372,84119	2014,12401	35192,60257	70531,00202	741997,27184
58	55,48154	5062,74955	1959,88195	33178,47856	65158,16083	671466,26982
59	56,90826	4766,18470	1904,40041	31218,59661	60095,41128	606308,10898
60	58,37921	4482,31526	1847,49215	29314,19620	55329,22658	546212,69770
61	59,87238	4210,49246	1789,11293	27466,70405	50846,91132	490883,47112
62	61,22970	3950,12044	1729,24055	25677,59112	46636,41886	440036,55979
63	62,32199	3700,78977	1668,01085	23948,35057	42686,29842	393400,14093
64	63,00362	3462,23969	1605,68886	22280,33972	38985,50865	350713,84252
65	63,39911	3234,36752	1542,68524	20674,65086	35523,26896	311728,33386
66	63,69017	3016,95090	1479,28613	19131,96561	32288,90144	276205,06490
67	63,91845	2809,59640	1415,59596	17652,67948	29271,95054	243916,16346
68	64,32566	2611,88765	1351,67751	16237,08352	26462,35414	214644,21292
69	64,74635	2423,18638	1287,35184	14885,40602	23850,46649	188181,85879

Tabla 2. *Símbolos de conmutación al 5 % (continuación)*

x	C_x	D_x	M_x	R_x	N_x	S_x
70	65,20022	2243,05020	1222,60549	13598,05417	21427,28011	164331,39230
71	65,37461	2071,03807	1157,40528	12375,44868	19184,22990	142904,11219
72	65,27098	1907,04260	1092,03067	11218,04340	17113,19183	123719,88229
73	64,73155	1750,96007	1026,75969	10126,01273	15206,14923	106606,69046
74	63,86373	1602,84947	962,02814	9099,25304	13455,18915	91400,54124
75	62,78462	1462,65958	898,16441	8137,22491	11852,33969	77945,35208
76	61,66346	1330,22451	835,37980	7239,06050	10389,68011	66093,01240
77	60,52896	1205,21702	773,71634	6403,68070	9059,45560	55703,33229
78	59,46861	1087,29677	713,18737	5629,96436	7854,23858	46643,87669
79	58,33164	976,05213	653,71877	4916,77699	6766,94181	38789,63811
80	57,11045	871,24182	595,38713	4263,05822	5790,88968	32022,69630
81	55,56218	772,64366	538,27668	3667,67110	4919,64786	26231,80663
82	53,63097	680,28893	482,71450	3129,39442	4147,00420	21312,15877
83	51,17671	594,26325	429,08353	2646,67992	3466,71527	17165,15457
84	48,24964	514,78828	377,90682	2217,59639	2872,45202	13698,43930
85	45,15405	442,02491	329,65717	1839,68957	2357,66374	10825,98728
86	41,91407	375,82205	284,50312	1510,03240	1915,63882	8468,32355
87	38,27937	316,01170	242,58905	1225,52928	1539,81677	6552,68472
88	34,29750	262,68415	204,30968	982,94023	1223,80507	5012,86795
89	30,27362	215,87788	170,01218	778,63055	961,12092	3789,06288
90	26,49620	175,32437	139,73856	608,61837	745,24304	2827,94196
91	22,97618	140,47939	113,24237	468,87981	569,91868	2082,69891
92	19,59221	110,81372	90,26619	355,63744	429,43929	1512,78024
93	16,38672	85,94466	70,67397	265,37125	318,62557	1083,34095
94	13,40325	65,46534	54,28726	194,69728	232,68091	764,71538
95	10,71299	48,94469	40,88400	140,41002	167,21558	532,03446
96	8,31897	35,90100	30,17101	99,52602	118,27089	364,81889
97	6,32150	25,87245	21,85204	69,35501	82,36989	246,54800
98	4,68703	18,31893	15,53054	47,50297	56,49744	164,17811
99	3,40681	12,75957	10,84351	31,97243	38,17851	107,68067
100	2,42619	8,74516	7,43670	21,12892	25,41893	69,50216
101	1,68989	5,90253	5,01051	13,69222	16,67377	44,08323
102	1,16272	3,93157	3,32062	8,68172	10,77124	27,40946
103	0,78829	2,58163	2,15790	5,36110	6,83967	16,63822
104	0,52433	1,67041	1,36961	3,20320	4,25803	9,79855
105	0,34048	1,06654	0,84528	1,83359	2,58762	5,54052
106	0,22158	0,67528	0,50481	0,98831	1,52108	2,95290
107	0,13897	0,42154	0,28323	0,48350	0,84580	1,43183
108	0,08823	0,26250	0,14426	0,20028	0,42426	0,58602
109	0,05602	0,16176	0,05602	0,05602	0,16176	0,16176

Anexo 3

Tabla 3. *Símbolos de conmutación al 10 %*

x	C_x	D_x	M_x	R_x	N_x	S_x
0	1145,45455	100000,00000	1830,01769	17314,37919	1079869,79898	11688108,90674
1	76,03306	89763,63636	684,56314	15484,36150	979869,79898	10608239,10776
2	48,08415	81527,27273	608,53008	14799,79836	890106,16261	9628369,30879
3	33,46766	74067,61833	560,44594	14191,26828	808578,88988	8738263,14617
4	24,83685	67300,73082	526,97828	13630,82234	734511,27155	7929684,25629
5	20,32106	61157,64571	502,14142	13103,84406	667210,54073	7195172,98474
6	16,93422	55577,53868	481,82036	12601,70264	606052,89501	6527962,44401
7	13,99522	50508,10094	464,88615	12119,88227	550475,35633	5921909,54900
8	11,02654	45902,46018	450,89092	11654,99613	499967,25539	5371434,19266
9	8,86750	41718,48272	439,86439	11204,10521	454064,79521	4871466,93727
10	6,65938	37917,02589	430,99689	10764,24082	412346,31249	4417402,14207
11	6,05399	34463,36415	424,33751	10333,24393	374429,28660	4005055,82958
12	6,95195	31324,27706	418,28352	9908,90642	339965,92245	3630626,54298
13	9,74326	28469,66356	411,33158	9490,62290	308641,64539	3290660,62052
14	12,44839	25871,76907	401,58832	9079,29133	280171,98183	2982018,97513
15	14,58115	23507,34168	389,13993	8677,70301	254300,21276	2701846,99330
16	16,22326	21355,72947	374,55878	8288,56308	230792,87108	2447546,78054
17	16,90673	19398,07625	358,33552	7914,00430	209437,14161	2216753,90946
18	16,67782	17617,70805	341,42879	7555,66878	190039,06536	2007316,76784
19	16,35080	15999,42041	324,75098	7214,23999	172421,35731	1817277,70248
20	15,94541	14528,57685	308,40018	6889,48901	156421,93690	1644856,34517
21	15,23290	13191,85173	292,45477	6581,08883	141893,36006	1488434,40827
22	14,40648	11977,35958	277,22187	6288,63406	128701,50833	1346541,04821
23	13,19833	10874,10222	262,81539	6011,41220	116724,14875	1217839,53988
24	11,99848	9872,34915	249,61706	5748,59681	105850,04653	1101115,39112
25	10,73990	8962,86438	237,61858	5498,97975	95977,69738	995265,34460
26	9,61099	8137,31863	226,87868	5261,36117	87014,83300	899287,64722
27	8,73726	7387,95140	217,26769	5034,48249	78877,51436	812272,81422
28	7,94297	6707,58220	208,53043	4817,21480	71489,56296	733395,29985
29	7,27819	6089,85903	200,58747	4608,68437	64781,98076	661905,73689

Tabla 3. *Símbolos de conmutación al 10 % (continuación)*

x	C_x	D_x	M_x	R_x	N_x	S_x
30	6,61653	5528,95730	193,30928	4408,09690	58692,12173	597123,75613
31	6,15712	5019,70828	186,69275	4214,78762	53163,16444	538431,63440
32	5,68349	4557,21405	180,53563	4028,09488	48143,45615	485268,46996
33	5,36252	4137,23837	174,85214	3847,55925	43586,24210	437125,01381
34	5,08853	3755,76327	169,48961	3672,70711	39449,00374	393538,77170
35	4,94943	3409,24172	164,40108	3503,21750	35693,24047	354089,76797
36	4,79356	3094,36122	159,45166	3338,81641	32283,99875	318396,52750
37	4,67860	2808,26210	154,65810	3179,36475	29189,63753	286112,52874
38	4,56923	2548,28694	149,97950	3024,70666	26381,37543	256922,89122
39	4,48527	2312,05526	145,41027	2874,72716	23833,08849	230541,51578
40	4,41899	2097,38315	140,92500	2729,31689	21521,03323	206708,42730
41	4,40073	1902,29297	136,50601	2588,39189	19423,65008	185187,39407
42	4,38247	1724,95652	132,10529	2451,88588	17521,35711	165763,74399
43	4,34625	1563,75982	127,72282	2319,78060	15796,40059	148242,38688
44	4,30783	1417,25359	123,37657	2192,05778	14232,64076	132445,98630
45	4,27790	1284,10453	119,06874	2068,68121	12815,38717	118213,34553
46	4,24048	1163,08985	114,79084	1949,61246	11531,28264	105397,95836
47	4,22605	1053,11393	110,55036	1834,82162	10368,19279	93866,67572
48	4,22605	953,15024	106,32430	1724,27126	9315,07887	83498,48293
49	4,21668	862,27417	102,09825	1617,94696	8361,92862	74183,40406
50	4,18183	779,66892	97,88157	1515,84871	7499,65445	65821,47544
51	4,11143	704,60810	93,69973	1417,96714	6719,98553	58321,82098
52	4,03847	636,44138	89,58830	1324,26741	6015,37743	51601,83545
53	3,97971	574,54460	85,54983	1234,67911	5378,93605	45586,45802
54	3,90883	518,33357	81,57012	1149,12928	4804,39145	40207,52197
55	3,83237	467,30351	77,66129	1067,55915	4286,05788	35403,13052
56	3,74189	420,98899	73,82892	989,89786	3818,75437	31117,07264
57	3,65208	378,97538	70,08703	916,06894	3397,76538	27298,31827
58	3,56573	340,87100	66,43495	845,98191	3018,79000	23900,55289
59	3,49118	306,31699	62,86922	779,54696	2677,91900	20881,76289
60	3,41863	274,97881	59,37804	716,67774	2371,60201	18203,84389
61	3,34670	246,56211	55,95942	657,29969	2096,62320	15832,24187
62	3,26700	220,80068	52,61272	601,34028	1850,06108	13735,61868
63	3,17413	197,46089	49,34572	548,72756	1629,26041	11885,55759
64	3,06299	176,33577	46,17159	499,38184	1431,79952	10256,29719
65	2,94212	157,24226	43,10860	453,21025	1255,46375	8824,49767
66	2,82128	140,00539	40,16649	410,10164	1098,22149	7569,03392
67	2,70269	124,45635	37,34521	369,93516	958,21610	6470,81243
68	2,59627	110,43945	34,64252	332,58995	833,75974	5512,59634
69	2,49447	97,80323	32,04625	297,94742	723,32029	4678,83659

Tabla 3. *Símbolos de conmutación al 10 % (continuación)*

x	C_x	D_x	M_x	R_x	N_x	S_x
70	2,39778	86,41755	29,55178	265,90118	625,51707	3955,51630
71	2,29491	76,16364	27,15400	236,34940	539,09951	3329,99923
72	2,18712	66,94476	24,85909	209,19540	462,93588	2790,89972
73	2,07045	58,67175	22,67197	184,33630	395,99112	2327,96384
74	1,94985	51,26750	20,60152	161,66433	337,31936	1931,97273
75	1,82977	44,65698	18,65167	141,06281	286,05186	1594,65336
76	1,71541	38,76748	16,82191	122,41114	241,39489	1308,60150
77	1,60731	33,52776	15,10650	105,58923	202,62740	1067,20662
78	1,50737	28,87247	13,49919	90,48273	169,09964	864,57921
79	1,41135	24,74033	11,99182	76,98354	140,22717	695,47957
80	1,31899	21,07987	10,58047	64,99172	115,48684	555,25240
81	1,22490	17,84452	9,26148	54,41125	94,40697	439,76556
82	1,12859	14,99739	8,03658	45,14976	76,56245	345,35858
83	1,02799	12,50541	6,90800	37,11318	61,56506	268,79613
84	0,92514	10,34056	5,88001	30,20519	49,05965	207,23108
85	0,82643	8,47538	4,95487	24,32518	38,71909	158,17143
86	0,73226	6,87846	4,12844	19,37031	30,24371	119,45234
87	0,63836	5,52088	3,39618	15,24187	23,36525	89,20863
88	0,54596	4,38062	2,75782	11,84568	17,84437	65,84337
89	0,46000	3,43642	2,21186	9,08786	13,46375	47,99900
90	0,38430	2,66402	1,75186	6,87601	10,02732	34,53525
91	0,31810	2,03753	1,36755	5,12415	7,36330	24,50793
92	0,25892	1,53420	1,04945	3,75659	5,32577	17,14462
93	0,20672	1,13581	0,79053	2,70714	3,79157	11,81885
94	0,16139	0,82583	0,58381	1,91661	2,65577	8,02728
95	0,12314	0,58936	0,42242	1,33280	1,82993	5,37152
96	0,09127	0,41265	0,29928	0,91038	1,24057	3,54159
97	0,06620	0,28386	0,20801	0,61110	0,82792	2,30102
98	0,04686	0,19185	0,14181	0,40309	0,54405	1,47310
99	0,03251	0,12756	0,09495	0,26128	0,35220	0,92905
100	0,02210	0,08345	0,06244	0,16633	0,22464	0,57685
101	0,01469	0,05376	0,04034	0,10389	0,14119	0,35220
102	0,00965	0,03418	0,02565	0,06355	0,08743	0,21101
103	0,00624	0,02143	0,01600	0,03790	0,05325	0,12358
104	0,00397	0,01323	0,00975	0,02190	0,03182	0,07033
105	0,00246	0,00807	0,00579	0,01215	0,01859	0,03851
106	0,00153	0,00487	0,00333	0,00636	0,01052	0,01993
107	0,00091	0,00290	0,00180	0,00303	0,00565	0,00940
108	0,00055	0,00173	0,00089	0,00123	0,00274	0,00376
109	0,00034	0,00102	0,00034	0,00034	0,00102	0,00102

Anexo 4

Abreviaturas	
u.m.	Unidades monetarias
f/q	Fallecimiento/quiebra
v.a.	Variable aleatoria
i.e.	Es decir
v.g.	Por ejemplo
r.m.	Reservas matemáticas